

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009 ～ 2010

課題番号：21740005

研究課題名（和文）ダブルアフィンhecke環の表現論とその可積分系への応用

研究課題名（英文）Representations of double affine Hecke algebras and their applications to integrable systems

研究代表者

笠谷 昌弘 (KASATANI MASAHIRO)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号：40527884

研究成果の概要（和文）：（1） $C^{\vee}C$  型ダブルアフィンhecke環（DAHA）の多項式表現を用いて境界付き qKZ 方程式を定式化した。また固有値問題の解によってその方程式の多項式解を構成する手続きを与え、非対称 Koornwinder 多項式を用いていくつかの具体的な解を構成した。

（2）（通常の）qKZ 方程式の退化極限におけるその多項式解の構成について、退化 DAHA の多項式表現から定式化が可能であろうことが確認された。（3）パラメータが 1 のべき根における非対称 Macdonald 多項式と Schur 対称多項式の間にある等式が成り立つことが示唆された。

研究成果の概要（英文）：(1) We formulated boundary qKZ equation in terms of the polynomial representation of the double affine Hecke algebra (DAHA) of type  $C^{\vee}C$ . We gave a procedure to construct its polynomial solutions from solutions for an eigenvalue problem. Some special solutions are constructed by non-symmetric Koornwinder polynomials. (2) We confirmed that it will be possible to formulate a construction of polynomial solutions for a degenerate limit of the qKZ equation (with no boundary) in terms of the polynomial representation of degenerate DAHA. (3) We suggest an equality between non-symmetric Macdonald polynomials at roots of unity and Schur symmetric polynomials.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：代数の表現論・可積分系

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：アフィンhecke環、qKZ 方程式、Macdonald 多項式、Koornwinder 多項式

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) ダブルアフィンhecke環の多項式表現

ダブルアフィンhecke環（DAHA）とは、1990年代に導入された結合代数である。この代数は、アフィンワイル群の  $q$  変形であるアフィンhecke環をその部分代数として 2 つ含み、

いくつかの変形パラメータを持つ代数である。ルート系の型に応じて何種類かの代数があり、reduced なルート系の場合は Cherednik により、 $C^{\vee}C$  型と呼ばれる non-reduced なルート系の場合は野海、Stokman、Sahi らにより定式化された。

DAHA は多変数多項式環上に線形表現を持ち、これは多項式表現と呼ばれている。多項式表

現は Macdonald 対称多項式や Koornwinder 対称多項式についての予想の解決に大きく貢献し、DAHA の表現論で基本的かつ重要な例となっている。

DAHA の変形パラメータの値が一般 (generic) のときの多項式表現の構造 (既約性など) は、Cherednik、野海、Stokman、Sahi らにより、代数が導入された当初に既に調べられていた。変形パラメータが特殊化されたときの多項式表現の構造については、A 型 (GL 型) の DAHA については本研究代表者により、一般の reduced なルート系については Cherednik により、 $C^{\vee}C$  型の場合については本研究代表者により調べられた。

## (2) qKZ 方程式の多項式解

一方、Frenkel と Reshetikhin により導入された量子 Knizhnik-Zamolodchikov (qKZ) 方程式とは、量子群の表現に関する頂点作用素の行列要素が満たす  $q$  差分方程式系である。また可解格子模型において相関関数が満たす方程式系でもある。この方程式の解の積分表示や、方程式のパラメータがレベル 1 と呼ばれる特別な場合の多項式解などは得られていたが、パラメータが一般 (generic) でない場合の多項式解の一般的な構成法は最近まで知られていなかった。

最近、笠谷 (本研究代表者) と竹山により、qKZ 方程式の多項式解を、A 型 (GL 型) のダブルアフィンヘッケ環の多項式表現を用いて一般的に構成する手法が得られた。すなわち、Dunkl-Cherednik 型作用素と Demazure-Lusztig 型作用素についての同時固有関数から qKZ 方程式の多項式解が構成できることが示された。さらに、A 型 (GL 型) の非対称 Macdonald 多項式を用いて、具体的に方程式の解を構成した。この枠組みではパラメータは一般 (generic) であっても特殊化されていてもよく、既知のレベル 1 の多項式解がこの枠組みに取り込まれることが示された。

また、Stokman により、上記の笠谷-竹山の結果 (の一部) を一般の reduced なルート系に拡張する結果が得られていた。

## 2. 研究の目的

### (1) qKZ 方程式の拡張とその多項式解の構成

qKZ 方程式にはさまざまな境界条件を課したものが考えられるが、 $C^{\vee}C$  型 DAHA の観点から、それらを一般化した境界条件のもとでの qKZ 方程式が示唆される。また  $C^{\vee}C$  型 DAHA の多項式表現を用いて、その多項式解を構成する

ことが期待される。

### (2) qKZ 方程式の退化極限

A 型 (GL 型) DAHA には連続退化極限が考えられており、退化ダブルアフィンヘッケ環 (退化 DAHA) と呼ばれている。一方、qKZ 方程式にもその連続極限版 (三角型 KZ 方程式) が存在する。これらの連続極限の間の関係を明らかにすること、特に笠谷-竹山で得られたような多項式解の構成法を得ることが期待される。

### (3) パラメータが 1 のべき根の時の問題

笠谷-竹山の構成法ではパラメータが 1 のべき根でない場合を扱っているが、パラメータが 1 のべき根である場合を精密に解析することも重要である。パラメータを 1 のべき根につぶしたとき、qKZ 方程式の解や非対称 Macdonald 多項式と、古典的な (パラメータのない) 多項式との間の関係を明らかにしていく。

## 3. 研究の方法

### (1) qKZ 方程式の拡張とその多項式解の構成について

qKZ 方程式の拡張を定義するために必要である  $K$  行列 (および  $R$  行列) を、 $C^{\vee}C$  型 DAHA の多項式表現の「形」(DAHA の生成元の、表現空間上における作用素の形) から決めていく。また、特定の作用素たちの固有値問題の解と、方程式の多項式解との関係を調べる。そして、固有値問題の解を、既知の多項式 (非対称 Koornwinder 多項式など) などを用いて記述する。

おおむね笠谷-竹山の手法を踏襲することになるが、方程式の拡張を与えることが目的であるため、qKZ 方程式と DAHA の多項式表現との関係をより強く意識した形で見通しよく定式化していく。

また  $C^{\vee}C$  型 DAHA の多項式表現についての研究代表者本人により得られている結果を応用できることが期待される。

### (2) qKZ 方程式の退化極限について

笠谷-竹山の構成法は、 $q$  差分方程式や  $q$  変形された代数についての結果であるのに対し、この目的のためにはその連続極限版を考えることになる。非対称 Macdonald 多項式の連続極限版である非対称 Jack 多項式や、A 型 (GL 型) DAHA の連続極限版である (三角型) 退化 DAHA を扱うことになる。極限操作のアナロジーから期待される形はおおむね決まるため、重要なのはその正当化 (証明) である。

連続極限をとることにより変形パラメータはつぶれてしまい互いに区別が難しくなるが、DAHAの表現論の観点から見通しを立てて正当化できることが期待される。

(3) パラメータが1のべき根の時の問題について

非対称 Macdonald 多項式のパラメータを特別な1のべき根へ極限をとったものと、古典的な(パラメータのない) Schur 対称多項式などとの関係を見出していく。示すべき関係式を明らかにするため、コンピュータを用いた数式処理などによって多くの状況証拠を蓄積していく。また理論面から、組み合わせ論的明示公式、内積値、Pieri 型公式、主要項の比較などの、非対称 Macdonald 多項式や Schur 対称多項式について知られている事実を踏まえ、示すべき関係式の数学的証明を得ていく。

#### 4. 研究成果

(1) qKZ 方程式の拡張とその多項式解の構成について

本研究において、境界条件(境界での反射)を表すK行列を導入し、このK行列と相互作用を表すR行列が反射関係式およびYang-Baxter関係式を満たすことを確認し、R行列とK行列を用いて境界条件付きのqKZ方程式を定式化した。また、 $C^{\vee}C$ 型ダブルアフィンhecke環の多項式表現を用いて、境界条件付きqKZ方程式の多項式解を構成する手続きを得た。その手続きでは、Dunkl-Cherednik型作用素やDemazure-Lusztig型作用素の積に関する固有値問題を導入し、固有値問題の解から方程式の解を構成することができる。この手続きでは、パラメータは一般(generic)でも特殊化されていてもよい。また非対称Koorndwinder多項式を用いて、境界付きqKZ方程式の多項式解の具体例をいくつか構成した(この部分は茂地圭一氏との共同研究である)。

この結果の意義は、以下のとおりである。

- ①まず、A型(GL型)の場合に笠谷-竹山により得られていた結果やreducedなルート系の場合にStokmanにより得られていた結果を、non-reducedなルート系の場合に拡張することに成功したものである。 $C^{\vee}C$ 型はダブルアフィンhecke環の枠組みの中では最もパラメータが多い場合であり、この結果は非常に一般的な枠組みを表すと考えられる。
- ②また、境界における部分的な反射を表すK行列の導入に成功しており、多くの既知の境界条件をこの枠組みに含めることが可能である。

③さらに非常に具体的かつ興味深い解の例をいくつか与えており、組み合わせ論的、あるいは表現論的にも意義があると考えられる。

(2) qKZ 方程式の退化極限について

三角型退化 DAHA の多項式表現を用いた三角型 KZ 方程式の多項式解の構成について、竹山美宏氏との議論なども踏まえると、おおむね笠谷-竹山の(退化する前の方程式についての)構成法と同様の定式化が可能であろうことは確認された。この結果が以前の笠谷-竹山の結果と比べて本質的に新しい部分を含むかどうか、また関連する連続退化極限についての研究の中でのこの定式化の位置づけ、などについて検討している。

(3) パラメータが1のべき根の時の問題について

コンピュータ等を用いて様々な場合に計算をおこない、非対称 Macdonald 多項式と Schur 対称多項式の間で成り立つ等式について、ある程度一般的な形で定式化はなされつつある。

ただし、次数の大きい場合や変数の数が多い場合には、等式を確認するには膨大な計算が必要になるため、現在の計算機資源で等式が確認されたのは、次数や変数の数がある程度小さい場合に限られる。

また、等式の数学的証明については、いくつかのステップに分けて進んでいる部分はあるものの、現時点では全体としては完了していない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① Masahiro Kasatani, Boundary Quantum Knizhnik-Zamolodchikov Equation, New Trends in Quantum Integrable Systems: Proceedings of the Infinite Analysis 09, 査読有、2010、157-171

[学会発表] (計5件)

- ① 笠谷 昌弘,  $C^{\vee}C$ 型 DAHA の多項式表現と境界付き qKZ 方程式について、研究集会「BC系と AGT 予想の周辺」、2010年9月13日、東京大学大学院数理科学研究科
- ② 笠谷 昌弘, 境界付き qKZ 方程式と非対称 Koorndwinder 多項式について、RIMS 研究集会 2010「可積分系数理の多様性」、2010年8月19日、京都大学数理解析研究所

- ③ Masahiro Kasatani, The qKZ equation and its polynomial solutions, RIMS 合宿型セミナー「Diagram algebras and related topics」、2010年7月9日、沖縄県宜野湾市
- ④ 笠谷 昌弘, アフィンヘッケ環の多項式表現と qKZ 方程式について、日本数学会 2009年度秋季総合分科会 無限可積分系セッション特別講演、2009年9月24日、大阪大学
- ⑤ Masahiro Kasatani, Boundary quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation、Infinite Analysis 09 -New Trends in Quantum Integrable Systems-, 2009年7月30日、京都大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

笠谷 昌弘 (KASATANI MASAHIRO)

東京大学・大学院数理科学研究科・特任助教

研究者番号：40527884

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし