

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740008

研究課題名（和文）

モチヴィック基本群とモチヴィックガロア群

研究課題名（英文）

Motivic fundamental group and motivic Galois group

研究代表者

古庄 英和 (FURUSHO HIDEKAZU)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：60377976

研究成果の概要（和文）：

Grothendieck-Teichmüller 群とは、1990年に V. G. Drinfeld によりある種の量子群の変形群として導入された、1つの五角形関係式と2つの六角形関係式の3関係式で定義された副代数群である。この群は、数論幾何学の世界においては、A. Grothendieck の Teichmüller-Lego の哲学の観点から有理整数環の motivic Galois 群と一致しているのではと注目されている群でもある。本研究者は、この群の定義方程式について、実は1つの五角形関係式から2つの六角形関係式が従ってしまうという意外な事実を発見した。

多重ゼータ値の間には double shuffle relations と associator relations という二種類の重要な代数的関係式が有理数体上で成り立つことが知られている。これらはいずれも多重ゼータ値の代数的関係式の 'full set' を与えているだろうと予想されているが、この二関係式の相互関係については謎であった。Deligne-Terasoma の共同研究とは後者の関係式から前者の関係式が従うことを示そうとする(未だ未完ではあるが)研究プロジェクトである。本研究者はこのプロジェクトを完全に完遂させた。証明は、彼らの手法とは異なり、K. T. Chen のバー構成法を用いるものであり、非常に見通しのよい解決を与えているものである。

研究成果の概要（英文）：

The Grothendieck-Teichmüller is the pro-algebraic group introduced by V. G. Drinfeld in 1990 as a deformation group of a certain type of quantum groups, which is defined by special three relations; one pentagon equation and two hexagon equations. It is also worthy to note that in arithmetic geometry it is expected to coincide with the motivic Galois group of rational integers. I have found the unexpected fact that actually one pentagon equation implies the others, the two hexagon equations.

Double shuffle relations and associators relations are two of the most known algebraic relations over rational numbers among multiple zeta values. Though actually both are conjectured to yield 'the full set' of them, an interrelationship between these two relations was a mystery. P. Deligne and T. Terasoma posed a project (though incomplete) to deduce the former relations from the latter ones. One of my results is a final completion of their project. My method is quite different from theirs and actually it is based on really concise idea on K. T. Chen's bar construction calculus.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・代数学

キーワード：数論幾何学

### 1. 研究開始当初の背景

混合 Tate モチーフの理論はポリログなどの具体的な対象と関連して深く調べられており、一つの中心的テーマになっている。代数多様体の基本群には、混合モチーフの構造が入りコホモロジーと同様に種々の実現を有することが知られている。特に P.Deligne('89)が注目した射影直線引く 3 点の場合の代数曲線には、この motivic 基本群には不分岐な混合 Tate モチーフの構造が入り、基本的かつ重要な対象として興味を持たれている。

この混合 Tate モチーフの etale 実現での研究は、'80 年代の Y.Ihara らによるこの基本群への Galois 表現に関する一連の研究がそれであり、これは A.Grothendieck の Esquisse d'un programme ('85)に端を発しているともいえる。この side での研究では、これまでの間に、Y.Ihara、G.W.Anderson、T.Oda、Z.Wojtkowiak、H. Nakamura、M.Matasumoto、R.Hain らによる様々な研究があり現在も続いている。特に R.Sharifi による仕事は、この一連の研究と K.Kato、J.Coates、D.Burns、A.Huber らによる非可換岩沢理論の仕事とのつながりを指摘するものでもあり大変興味深い。

一方、Hodge 実現(Betti-de Rham 実現)では、KZ 方程式に関する V.G.Drinfel'd の理論を通じて周期が本質的に多重ゼータ値によって表わされることが示されており、ここ 15 年ほどの間に D.Zagier、M.Kontsevich、A.B.Goncharov、M.Kaneko、T.Terasoma、P.Cartier らによる多重ゼータ値に関する様々な研究に連なっている。

残る crystalline 実現での研究は、P.Deligne により示唆されていたものの本格的な研究はまだされていなかった。この side に光を当てたのが、本研究者が提唱した p 進多重ゼータ値の理論でありこれは etale side では Galois 像、Hodge side では多重ゼータ値にあたる crystalline side での対応物にあたる研究対象である。この研究は上述の非可換岩沢理論にどのように組み込まれていくのか、および、古典的な Anderson-Ihara 理論とはどのように関連しているのかはとても非自明な問題であり今後の研究の方向の一つを定めていると考えられる。

### 2. 研究の目的

抽象的な理論が先行しがちなモチーフの理論において、混合 Tate モチーフの理論は

ポリログなどの具体的な対象と関連して深く調べられており、一つの中心的テーマになっている。代数多様体の基本群には、混合モチーフの構造が入りコホモロジーと同様に種々の実現（具体的に etale 実現、Betti 実現、de Rham 実現、crystalline 実現）を有することが知られている。特に P.Deligne('89)が注目した射影直線引く 3 点の場合の代数曲線には、この motivic 基本群には不分岐な混合 Tate モチーフの構造が入り、基本的かつ重要な対象として興味を持たれている。本研究者の研究目的は、このモチーフが生み出す数論幾何学の様々な新分野を露呈させ、研究方向を提示し、研究を高めていくことである。

### 3. 研究の方法

Motivic 基本群と motivic Galois 群との相互関係を解明することは本研究の中心課題である。この研究は大きく分けて motivic Galois 群の内部構造の解明と外部構造の特徴づけの二つの部分より成り立っている。

当初の予定では、研究の最初の一年間はこの内部構造の研究に充てられており、特にいまだ十分に完全に解明されているとは言い難い motivic 基本群の p 進実現の解明を目指しているものであった。後半の二年間の研究は、motivic Galois 群の外部構造の研究に充てている。具体的には V.G.Drinfel'd の量子群の理論と M.Kontsevich の変形量子化の理論の方面からの motivic Galois 群の外部構造を究明していくことを計画しており、これは 21 世紀の数学研究の中心的課題の一つとなる数学と物理学との mysterious な関係を見据えたものである。

混合 Tate モチーフと基本群にまつわる様々な数論幾何学を軸として、motivic Galois 群と Grothendieck-Teichmüller 群との関連については重点を置いて研究してきた。この研究の背後にはモチーフの研究と量子群の研究を案連づける非自明な理論が存することを意識しつつ、多重ゼータ値、KZ 方程式、準 Hopf 代数の数論的な側面を中心に研究してきた。また、Alekseev-Torossian('08) による Kashiwara-Vergne 予想の解決と F.Brown の最近の仕事により最近大きな進展を見せている不分岐混合 Tate モチーフの理論との mysterious な関連についても取り組んできた。

#### 4. 研究成果

平成21年9月までは日本学術振興会の海外特別研究員として Paris の Ecole Normale Supérieure に滞在して研究を行った。フランスでの研究生活は大変すばらしいものであり計り知れない程の影響を与えてくれたと思う。特に滞在中に知り合った Strasbourg 大学の B. Enriquez 氏とは幾度も研究交流を行い非常に良い刺激になった。

論文①は本研究者の量子群サイドからの研究といえる。1990年に V. G. Drinfeld は1つの五角形関係式と2つの六角形関係式の3関係式で定義された Grothendieck-Teichmüller 群という副代数群を導入した。これは A. Grothendieck の Teichmüller-Lego の哲学の観点から motivic Galois 群と一致しているのではと考えられている。実はこの1つの五角形関係式から2つの六角形関係式が従ってしまうという意外な事実がこの論文で示されている。この論文は Annals of Mathematics より出版された。

多重ゼータ値の間には double shuffle relations と associator relations という二種類の重要な代数的関係式が有理数体上で成り立つことが知られており、これらはいずれも多重ゼータ値の代数的関係式の full set を与えているだろうと予想されている。Deligne-Terasoma の共同研究とは後者の関係式から前者の関係式が従うことを示そうとする研究プロジェクトである。偏屈層の multiplicative convolution という概念を導入して示していくのが彼らのアイデアであるが、彼らのプロジェクトは未だ完遂されていないようである。論文②は、彼らのプロジェクトの最終目標を完全に完遂させるものである。証明のアイデアは彼らの手法とは異なり、Chen の bar construction の技術を用いるものであり、証明は短くかつ非常に見通しのよい解決を与えている。この結果より、V. G. Drinfeld の Grothendieck-Teichmüller 群から G. Racinet の double shuffle 群への非自明な埋め込み射の構成が帰結として得られる。この論文も Annals of Mathematics より出版された。

この研究後は、P. Deligne のアドバイスを基にこの結果を cyclotomic なケースに拡張した結果を得て、プレプリントを書き上げた。こちらの帰結としては、B. Enriquez の cyclotomic Grothendieck-Teichmüller 群から G. Racinet の cyclotomic double shuffle

群への非自明な単射が存在することが従う。ここで、本質的になるのは B. Enriquez 氏により提出された混合五角形関係式である。

これら以外の研究としては、フランス滞在中に知り合った B. Enriquez 氏と共同研究を行い universal braided module category の変形群として同氏により導入された cyclotomic Grothendieck-Teichmüller 群より起因する混合五角形関係式と八角形関係式および distribution 関係式の相関関係についての論文③を発表した。

また、小森靖氏・松本耕二氏・津村博文氏らと共同研究を行い、 $p$ 進多重ポリログと  $p$ 進多重ゼータ関数の間に存するある種の関係性について結果を得た。この研究は先に述べた Motivic Galois 群の  $p$ 進実現の研究にあたるものであり、非可換岩沢理論の研究へのインパクトも期待できるかと思う。この研究内容については2012年1月に九州大学の集会で研究発表をした。

これらの研究については、2009年8月の第54回代数学シンポジウム、2010年10月の京都での第3回MSJ-SJシンポジウム、2011年5月には Leiden の Lorentz Center での研究集会、同年7月には Durham 大学での研究集会で発表をした。2010年6月の Montpellier 大学での研究集会では分野の異なる結び目、Kashiwara-Vergne 予想の研究者達と活発に研究討議を行うことができた。特に今後の研究の新しい方向を確立できたという面で、研究上非常に有益な機会であった。また2011年6月には Bonn での Mathematische Arbeitstagung で講演者として選出され発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3件)

① 古庄 英和, Pentagon and hexagon equations, Annals of Mathematics, Vol. 171 (2010), No. 1, 545-556, 査読有, DOI:10.4007/annals.2010.171.545

② 古庄 英和, Double shuffle relation for associators, Annals of Mathematics, Vol. 174 (2011), No. 1, 341-360, 査読有, DOI:10.4007/annals.2011.174.1.9

③古庄 英和, Benjamin Enriquez, Mixed Pentagon, octagon and Broadhurst duality equation, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol 216, Issue 4, (2012), 982-995, 査読有,  
http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2011.10.009.

[学会発表] (計 16 件)

Low dimensional topology and number theory IV, Kyushu University, Fukuoka, JAPAN, 12th-15th March. 2012.

5th Multiple Zeta Values seminar, Kyushu University, Hakata, Japan, 27th-29th. January. 2012.

Automorphic forms and Galois representations, Durham University, Durham, UK, 18th-28th July. 2011.

Mathematische Arbeitstagung 2011, Universität Bonn and the Max-Planck-Institute for Mathematics, Bonn, Germany, 24th-30th June. 2011.

The motivic fundamental group, Lorentz Center, Leiden, Netherlands, 23rd-27th May. 2011.

Workshop on L-functions, Kyushu University, Fukuoka, Japan, 21st-23rd April. 2011.

Low dimensional topology and number theory III, Nishijin Plaza, Fukuoka, JAPAN, 14th-17th March. 2011.

Development of Galois-Teichmüller Theory and Anabelian Geometry, RIMS, Kyoto, Japan, 25th-30th October. 2010.

Various Aspects of Multiple Zeta Values, RIMS, Kyoto, Japan, 6th-9th September. 2010.

Arithmetic Geometry Workshop 2010, Naha, Okinawa, Japan, 2nd-6th August. 2010.

Des associateurs de Drinfeld à ceux de Kashiwara-Vergne et lien avec les invariants de noeuds généralisés, l'Université Montpellier 2, Montpellier, France, 3rd-4th June. 2010.

Motives and Homotopy Theory of Schemes,

Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Germany, 16th-22nd May, 2010.

Quantum Groups and Quantum Topology, RIMS, Kyoto, Japan, 19th-20th. April. 2010.

p-adic Special Functions and Arithmetic Geometry, Yutomorikurabu, Zaoh, Japan, 28th-31st. October. 2009.

Anabelian Geometry, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK, 24th-28th. August 2009.

54th Algebra Symposium, Meiji University, Tokyo, Japan, 3rd-6th. August. 2009.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

古庄 英和 (FURUSHO HIDEKAZU)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授  
研究者番号 : 60377976

### (2) 研究分担者なし

( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者なし  
( )

研究者番号：