

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740014

研究課題名（和文）多重配置の自由性の解析と関連する幾何学の創出

研究課題名（英文） Analysis of freeness of multiarrangements and generation of related geometry

研究代表者

阿部 拓郎（ABE TAKURO）

京都大学・大学院工学研究科・講師

研究者番号：50435971

研究成果の概要（和文）：

本研究課題においては、近年研究が進展している多重配置の自由性をより深く理解し、かつ関連する幾何学を創出することを目的としていた。研究成果として、特にコクセター型配置の場合にその自由性を、不変式論を用いてより深く理解することに成功した。また、超平面配置の自由性を、その Ziegler 制限の自由性に第二ベッチ数の情報、あるいは tame という条件下での部屋数の最小性を用いた理解にも到達した。さらに、二次元直線配置の部屋数の最小性と自由性を結びつけることで、自由性の幾何学的側面を創出した。

研究成果の概要（英文）：

In this research program, we aimed at the deep understanding of free multiarrangements the study of which is developing in these days. Also, to find related geometry to them is one of purposes. As a result, in particular for Coxeter arrangement cases, we could understand the freeness deeply by using the invariant theory of Coxeter groups. Also, we relate the freeness of arrangements to that of its Ziegler restriction and the second betti number, or the minimality of chambers under the assumption of tameness. Moreover, by relating the freeness of line arrangements to the minimality of chambers, we find a geometric aspect of freeness.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：超平面配置、代数幾何、自由配置

1. 研究開始当初の背景

超平面配置とは、ベクトル空間内の超平面の有限族である。この極めてシンプルな幾何学的対象に、代数、代数幾何、トポロジー、組み合わせ論、超幾何関数論、さらには統計学など様々な数学の分野が交錯している、極めて活発な研究対象である。

この超平面配置、及び各超平面に重さを乗せた多重配置には、様々な特徴を持つものに名前が付いている。その中でも重要なものに、自由配置がある。これはコクセター配置の一般化であり、その顕著な特徴として対応する対数的ベクトル場が自由基底を持ち、その次数を用いて配置の指標が定義できる。これは

コクセター群のそれと類似の性質を、例えば寺尾の分解定理などが代表するように保持しており、極めて興味深い対象である。

他方、自由配置の特定あるいは特徴づけの研究は、長い間興味を持たれ続けているにもかかわらず、未解明の問題であった。これに対し近年、吉永正彦氏は、超平面配置の Ziegler 制限の自由性と、元の配置の自由性を代数幾何的に結びつける手法を開発した。これにより、自由配置研究、さらに多重自由配置研究に大きな一歩が踏み出された。

しかしながら、多重自由配置の一般論の研究は、その構造の複雑さから、定式化されて以来 15 年ほどあまり進展していなかった。それに対し研究代表者は、多重配置の加除定理や特性多項式の導入といった研究を通して、徐々にその構造を明らかにしつつあった。

以上が、研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

上述のような背景の下、本研究課題においては、大きく分けて以下の二つの目的を掲げた：

- (a) 以前より研究している多重自由配置の構造論を進展させ、その理解を深める。特に、その幾何学的理解を探究する。
- (b) コクセター多重配置の不変式論などを通して、新たな知見を広げる。

これらについて、以下詳述する。

まず(a)についてであるが、多重自由配置の構造については、寺尾宏明氏、Max Wakefield 氏と研究代表者の共同研究により、2007 年から 2008 年にかけて出版された論文において、加除定理及び特性多項式が定式化され、扱いやすい対象となっていた。それでもまだ、多重自由配置とはなんなのか、という根源的な疑問は残されたままであり、同時にどのような配置が自由となるかの決定は大変難しい問題のままであった。

そこで、今までは代数的側面からの研究が多かったことを振り返り、多重自由配置の幾何学的な特徴づけを行うことを、研究課題の中で目的として掲げた。代数的対象の幾何学的理解が、関連する数学の発展に重要なことは論を待たない。さらに、この研究が成功すれば、その上部構造たる自由配置に関する研究にも大きな進展が見込めると判断した。

続いて(b)についてであるが、自由配置がコクセター配置の一般化である以上、元のコクセター配置の理解を深めることは重要である。近年、寺尾氏との共同研究として、コクセター型多重配置と原始微分の関係がより深く考察されていた。よってその理論を進展させることを本研究課題のもう一つの研究目的の柱とした。これらは、齋藤恭司氏によ

って研究が創始され、現在はフロベニウス多様体構造として数理論理学において重きをなしている研究の新しい理解の方針を与えるものでもあり、さらに進展があればこれらの数学にも貢献ができると考えられる。

以上が本研究課題の研究目的である。

3. 研究の方法

研究の目的に記述した、目的(a)と(b)についてそれぞれの研究の方法を述べる。

まず目的(a)については、沼田泰英氏との共同研究として得られていた結果を、更に深く精査するところから始めた。その研究においては、二次元多重配置の指標の構造を表す重複度格子の理論を確立させていた。その重複度格子における連結成分の最大半径が、組み合わせ論的に決定されることを予想し、それを示すために微分幾何学的な手法であるアフィン接続の理論を用いることを考えた。

さらに、沼田氏及び縫田光司氏との共同研究として得られていた、A型のある重複度を持つ多重配置の自由性の、符号付きグラフを用いた特徴づけの上部構造たる、有向グラフと自由性の研究を、グラフ分類理論の基本に戻って行うことから始めた。

もうひとつ、本研究目的で有効だった方針に、Mathias Schulze 氏の論文の一般化があげられる。Schulze 氏の論文において、tame という条件のもとで、自由性と多重自由性の関係が一般化されていた。その論文に、組み合わせ論的制限射と呼ばれる新しい概念を導入することで、彼の理論を大幅に一般化できると考え、その方向でいくつかの研究を行った。

続いて、目的(b)に対する研究方法を述べる。まずコクセター群、即ちコクセター配置が軌道分解する場合、それぞれの原始微分を書き下し、それらの性質、特に不変性がどれほど保たれるかについて観察を行った。その結果を元に、既存の理論との整合性を確かめつつ、必要と思われる理論、特に原始微分による shift 同型と原始分解理論の有無を研究することで、新しい知見が得られると考えた。これが完成すれば、その上部構造たる Shi-Catalan 配置の自由性も証明できると予想されることも、本研究方法のモチベーションとなった。

また、2011年に発表された、陶山大輔氏及び寺尾氏による、A型の Shi 配置の基底構成における具体形から、特徴的な性質を抽出することで、これらの配置、特に拡張型 Shi 配置まで含めた、特徴のある基底の存在の可能性が見通せた。そこで、様々なアプローチでそのような基底の存在定理の証明に挑戦した。

4. 研究成果

それぞれの目的(a)及び(b)について、上述の研究方法で得られた結果を個別に記述する。

まず目的(a)についてであるが、沼田氏との共同研究で得られていた重複度格子の理論を発展させ、その連結成分の半径の最大値が、多重配置の超平面の枚数から2を引いた数で上から抑えられることを示した。この極めて簡単な上界に、吉永正彦氏の三次元の理論を組み合わせることで、組み合わせ論的に定まる三次元中心的配置の部屋数のある下界を導出し、かつその部屋数をとる配置の自由性まで証明した。これは換言すれば、最小部屋数配置という幾何学が、自由性という代数的性質とつながっていることを示したもので、まさに多重配置及び超平面配置の自由性とその幾何学とを関連付ける結果となった。本結果は arXiv:1005.5726 として公開しており、学術雑誌に投稿中である。

次に沼田氏及び縫田氏らとの共同研究において導入した、符号付加除可能グラフの上部構造を決定し、結果としてA型のコクセター配置とカタラン配置の間にある配置の自由性を有向グラフを用いて特徴づける、Athanasiadis 予想の解決に成功した。本結果はすでに学術雑誌 Mathematical Research Letters に受理されており、掲載巻号については決まり次第公開したい(雑誌論文1)。

また、上記最小部屋数理論において重要な役割を果たした吉永氏の三次元の理論の高次元化を、吉永氏との共同研究として達成した。また、最小部屋数配置理論自体も、tame という条件付きながら研究代表者によって高次元化された。これらはそれぞれ arXiv:1109.0668 及び arXiv:1109.1042 として公開されており、2011年度段階においては、学術雑誌に投稿中である。

続いて、目的(b)に関する成果を記述する。まず、軌道分解するコクセター型の原始微分理論の構築を、寺尾氏との共同研究として完成させた。これはより一般に、可約なコクセター配置の原始微分の理論を構築したもので、これにより軌道分解がある場合の理論構築の前提が整った。本論文はすでに学術雑誌に掲載されている。(雑誌論文4)。

そこで、上記理論を用いたコクセター多重自由配置の理論を、多重配置のレベルではほぼ決定的といえる段階まで完成させることにも成功した。これは寺尾氏、及び若神子篤史氏との共同研究であり、arXiv:1011.0329 にて公開中で、2011年度段階においては、学術雑誌に投稿中である。また、その応用として、Shi-Catalan 配置の自由性の決定に、寺尾氏との共同研究の結果成功した。本論文は

すでに学術雑誌に掲載されている(雑誌論文3)。

更に、拡張型 Shi 配置の基底としてきわめて特徴的な、Simple-root basis の存在定理を証明することにも成功した。これは寺尾氏との共同研究であるが、この基底はそれぞれがある特定の simple root のアフィン変形を定める一次式で割れる、という顕著な特徴を持つ。この理論を更に一般化することで、拡張型 Shi 及び Catalan 配置の基底構成も視野に入れることができており、極めて有意義な結果である。これは arXiv.1111.3510 にて公開中であり、学術雑誌に投稿中である。

以上が研究成果に関する記述である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

1. Takuro Abe, On the conjecture of Athanasiadis related to freeness of a family of hyperplane arrangements, Mathematical Research Letters, 査読有, 掲載決定済.
2. Takuro Abe and Yasuhide Numata, Exponents of 2-multiarrangements and multiplicity lattices, Journal of Algebraic Combinatorics, 査読有, 35 (2012), 1-17.
3. Takuro Abe and Hiroaki Terao, The freeness of Shi-Catalan arrangements, European Journal of Combinatorics, 査読有, 32 (2011), 1191-1198.
4. Takuro Abe and Hiroaki Terao, Primitive filtrations of the modules of invariant logarithmic forms of Coxeter arrangements, Journal of Algebra, 査読有, 330 (2011), 251-262.
5. Takuro Abe and Hiroaki Terao, A primitive derivation and logarithmic differential forms of Coxeter arrangements, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 264 (2010), 813-828.
6. Takuro Abe, Koji Nuida and Yasuhide Numata, Signed-eliminable graphs and free multiplicities on the braid arrangement, Journal of the London

Mathematical Society, 査読有, 80 (2009), 121-134.

7. Takuro Abe and Masahiko Yoshinaga, Coxeter multiarrangements with quasi-constant multiplicities, *Journal of Algebra*, 査読有, 322 (2009), 2839-2847.
8. Takuro Abe, The stability of the family of B₂-type arrangements, *Communications in Algebra*, 査読有, 37 (2009), 1193-1215.

[学会発表] (計 10 件)

1. Takuro Abe, 超平面配置の代数と幾何 I, II, III, 2011 函数方程式論サマーセミナー, 2011 年 8 月 2 日, 3 日, 支笏湖休暇村.
2. Takuro Abe, Chambers and freeness of line arrangements, Free divisor conference, 2011 年 5 月 31 日, University of Warwick, Coventry, UK.
3. Takuro Abe, Chambers and freeness of line arrangements, AMS Sectional Meeting, 2011 年 4 月 9 日, College of Holy Cross, Worcester, USA.
4. Takuro Abe, Chambers and freeness of line arrangements, 代数・解析・幾何学セミナー, 2011 年 2 月 15 日, 鹿児島大学.
5. Takuro Abe, Exponents and freeness of 3-arrangements, 特異点と多様体の幾何学, 2010 年 9 月 16 日, 山形大学.
6. Takuro Abe, Chambers and freeness of real arrangements of hyperplanes, Colloquium, 2010 年 9 月 8 日, US Naval Academy, Washington DC, USA.
7. Takuro Abe, Exponents and freeness of 3-arrangements, 代数幾何の関連する諸分野, 2010 年 9 月 2 日, 北海道大学.
8. Takuro Abe, Free Coxeter arrangements and applications, The 2nd Kyushu University-POSTECH Joint Workshop -Algebraic Geometry and Related Topics, 2010 年 3 月 18 日, 九州大学.
9. Takuro Abe, Primitive derivations and Coxeter multiarrangements, RIMS 研究集会『表現論と組合わせ論』, 2009 年 8 月 27 日, 北海道大学.
10. Takuro Abe, Primitive derivations and free Coxeter multiarrangements, 数学小研究集会@つくば, 2009 年 7 月 6 日, 筑波大学.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~abetaku/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部拓郎 (ABE TAKURO)

京都大学・大学院工学研究科・講師

研究者番号 : 50435971

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :