

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740018

研究課題名（和文） 標準的高さとその周辺

研究課題名（英文） canonical heights and related topics

研究代表者

川口 周 (KAWAGUCHI SHU)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20324600

研究成果の概要（和文）：

高さとは、代数体上の代数多様体の点や部分代数多様体の算術的な「大きさ、複雑さ」を測る量と考えられる。代数多様体が「良い」自己写像を持つときには、その写像に関して良く振る舞う高さ（標準的高さ）が存在することがある。当該研究では、アフィン空間の自己同型に関する大域的、および局所的な標準的高さ関数の構成と性質、 \mathbb{Q} -代数上で定義されたアフィン空間の三角自己同型の次数の増大度、代数多様体の支配的有理写像に対して有理点の反復合成に関する高さの増大度と写像の次数の増大度の関係を調べた。

研究成果の概要（英文）：

Heights are considered to measure arithmetic “bigness” or “complexity” of points and subvarieties of algebraic varieties defined over number fields. When algebraic varieties have “nice” self-maps, there sometimes exist heights that behave well with respect to the self-maps. Such heights are called canonical heights. We have constructed global and local canonical height functions for affine space regular automorphisms. We have also studied difference of these canonical heights. We have studied degree growth of affine space triangular automorphisms over \mathbb{Q} -algebras. For dominant rational maps of algebraic varieties, we have studied arithmetic growth of points with respect to degree growth of the maps.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：(広い意味の) 代数幾何学
 科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：標準の高さ，Arakelov 幾何

1. 研究開始当初の背景

高さとは，代数体上に定義された代数多様体の点（より一般には部分代数多様体）の算術的な「大きさ，複雑さ」を測る量と考えられる．代数多様体が良い自己写像を持つときには，その写像に関して良く振る舞う高さが存在することがある．このような高さを標準的高さという．最も有名で深く研究されている標準的高さは，代数体上に定義されたアーベル多様体の n 倍射に関してよく振る舞うもので，Neron-Tate の高さと呼ばれている．その他に射影空間の射についても標準的高さが，Call-Silverman や Zhang によって構成され，その数論的性質が調べられている．

2. 研究の目的

アーベル多様体の n 倍射や，射影空間の射に関する標準の高さと同じように，代数体上に定義された代数多様体とその自己写像に関して，標準の高さ関数が構成できるかを調べる．特に，アフィン空間の良い多項式自己同型写像について，大域的小よび局所的な標準的高さ関数を構成し，それらを用いてアフィン空間の良い多項式自己同型写像に関して，や写像の反復合成に関する代数的・数論的性質を調べたい．また，標準の高さ関数が構成できるか分からないような，一般の代数多様体の（有理）写像についても，写像の反復合成に関する有理点の振る舞いなど，代数的・数論的性質を調べたい．

3. 研究の方法

高さは，もともとディオファントス幾何の有用な道具である．アラケロフ幾何を用いると，高さを代数幾何的に構成することができる．

一方，標準の高さ関数は，局所標準の高さ関数に分解したとき，複素数体では複素力学系で深く研究されている Green 関数というものに対応する．当該研究では，アラケロフ幾何や複素力学系の手法も用いて，代数多様体の自己写像に関する高さ関数や，代数的・数論的な性質を調べる．

4. 研究成果

当該研究期間について次のような結果を得た．

- (1) アフィン空間の自己同型に関する大域的，および局所的な標準の高さ関数の研究を進めた (arXiv:0909.3573)．また，アフィン空間の自己同型に関する標準の高さの差に関して有限性の性質を持つことが分かり，2009 年 12 月の研究集会「複素力学系とその関連分野の総合的研究」や 2011 年 4 月の研究集会「Heights 2011」などで講演した．
- (2) 一般に，複素数体上の射影空間の有理写像について，写像の反復合成に関する増大度については多くの研究がある．また，標数 p の体上でも研究がある．本研究では， \mathbb{Q} -代数上で定義されたアフィン空間の自己同型の次数の増大度がどうなるかを考えた．一般次元の三角自己同型のヤコビアンが 1 の反復合成に関する増大度は，次元と次数とジャコビアン逆元の次元で抑えられることが分かった．また，アフィン平面の次数 d の三角自己同型の反復合成に関する増大度は d の 2 次式という定数で押さえられることが分かった．適当なグラスマン多様体上のシューベルト計算を用いることで，この定数が最善の評価であることを確かめた．

(3) 一般の代数多様体の支配的な有理写像について、有理点の算術的な増大度と写像の次数の増大度の関係について考えた。ブラウン大学のシルバーマン氏も同様のことを考えており、同氏と、ブラウン大学 ICERM 研究所のプログラム「complex and arithmetic dynamics」で2月に短期滞在した折に、算術的増大度と次数増大度について議論をし、両者の関係に関するある結果を得た。

また、当該研究に関連するものとして、以下の研究集会の組織委員の一員を勤めた。

・ Automorphisms of algebraic varieties -- dynamics and arithmetic, 白浜, 2011年12月

・ 城崎代数幾何学シンポジウム, 城崎大会議館, 2011年10月

・ Paris--Barcelona--Kyoto seminar on Arakelov geometry, 京都大学, 2010年9月 (local organizer の一員として)

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, Canonical heights and the arithmetic complexity of morphisms on projective space, Pure and Applied Mathematics Quarterly **5** (John Tate special issue), (2009), 1179–1195. 査読有
<http://www.intlpress.com/JPAMQ/2009-index/PAMQ-vol-5-4.php>

② Shu Kawaguchi and Joseph H. Silverman, Nonarchimedean Green functions and dynamics on projective space, Mathematische Zeitschrift **262** (2009), 173–197. 査読有
DOI 10.1007/s00209-008-0368-8

③ Shu Kawaguchi, Introduction

to algebraic and arithmetic dynamics—a survey, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B25 (2011), 103–124. 査読有
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

[学会発表] (計8件)

① Shu Kawaguchi, Analytic torsion related to the moduli of cubic surfaces, Hawaii Conference in Algebraic Number Theory, Arithmetic Geometry and Modular Forms, Special session on Arithmetic Geometry, University of Hawaii at Manoa, USA, 2012年3月8日

② Shu Kawaguchi, Analytic torsion related to the moduli of cubic surfaces, Sino-France Summer Institute on Arithmetic Geometry, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China, 2011年7月14日

③ Shu Kawaguchi, Difference of canonical height functions for affine regular automorphisms, Heights 2011, Tossa de Mar, Spain, 2011年4月27日

④ 川口 周, Arakelov 幾何, 代数・数論力学系の問題, RIMS 研究集会: 複素幾何学の諸問題, 京都大学数理解析研究所, 2010年9月9日

⑤ Shu Kawaguchi, Local and global canonical height functions for affine space regular automorphisms, AMS-MAA Joint Mathematics Meetings, Special Session on Arithmetic and Nonarchimedean Dynamics, Moscone West Center, San Francisco, USA, 2010年1月13日

⑥ Shu Kawaguchi, Finiteness results on commuting maps over complex numbers and arithmetic complexity, RIMS 研究集会：複素力学系とその関連分野の総合的研究, 京都大学, 2009 年 12 月 18 日

⑦ 川口 周, 代数・数論力学系の紹介 (サーベイ), RIMS 研究集会：代数的整数論とその周辺, 東京大学, 2009 年 12 月 8 日

⑧ Shu Kawaguchi, Elliptic j -function and Borcherds Φ -function, 多変数関数論葉山シンポジウム XIII, 湘南国際村センター, 2009 年 7 月 22 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川口 周 (KAWAGUCHI SHU)

大阪大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：20324600