

機関番号：17102

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2009～2010

課題番号：21740023

研究課題名 (和文) 幾何学的 torsion Galois 表現と分岐理論

研究課題名 (英文) Geometric torsion Galois representations and ramification theory

研究代表者

服部 新 (HATTORI SHIN)

九州大学・数理学研究院・助教

研究者番号：10451436

研究成果の概要(和文):

混標数(0,p)の局所体上の torsion Galois 表現の分岐理論について研究した。混標数の局所体の整数環上の  $p$  で消える有限平坦群スキームの圏から、等標数における同様の圏への埋め込みが存在することが知られている。本研究ではその埋め込みが分岐を保つことを証明した。これにより、混標数における分岐の研究をより容易な等標数の場合に帰着することができる。この定理の応用として、 $p$  進 Siegel 保型形式の基礎理論である Abel 多様体の標準部分群の理論について、標準部分群の新しい存在定理を示した。

研究成果の概要(英文):

In this two-year study period, I had investigated a ramification theory of torsion Galois representations of local fields of mixed characteristic  $(0,p)$ . It is well-known that there exists an inclusion from the category of finite flat group schemes killed by  $p$  over the ring of integers of such a local field into a similar category for equal characteristic  $p$ . In this research project, I proved that this inclusion preserves ramification of both sides. This enables us to reduce the study of ramification to the much easier case of equal characteristic. As an application of this result, I also proved a new existence theorem of canonical subgroups of Abelian varieties, which is one of the key ingredients of the theory of  $p$ -adic Siegel modular forms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野:数論幾何

科研費の分科・細目:数学・代数学

キーワード:局所体、ガロア表現、分岐、整  $p$  進 Hodge 理論

## 1. 研究開始当初の背景

$p$  を素数とし、 $K$  を  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大、 $G_K$  を  $K$  の絶対 Galois 群とする。 $p$  進 Hodge 理論によれば、 $K$  上の半安定還元を持つ proper smooth 代数多様体の  $p$  進エタール・コホモロジーを初めとする

$G_K$  の  $p$  進表現の良いクラス (semi-stable 表現や crystalline 表現) はフィルター付き  $(\phi, N)$  加群と呼ばれる線型代数的データで分類される。一方で、そのような  $p$  進表現の  $\mathbb{Z}_p$  格子に伴う  $\text{mod } p$

巾表現や、 $K$  上の半安定還元を持つ proper smooth 代数多様体の  $Z/p^n Z$  係数エタール・コホモロジー、また  $K$  の整数環  $O_K$  上の有限平坦群スキームに伴う  $G_K$  表現等、torsion 係数の  $G_K$  表現の良いクラス (torsion semi-stable 表現や torsion crystalline 表現. ここでは幾何学的 torsion  $G_K$  表現と呼ぶ) はより微妙な性質を持っており、そのような微妙な  $G_K$  表現を記述するのが整  $p$  進 Hodge 理論である.

整  $p$  進 Hodge 理論によると、幾何学的 torsion  $G_K$  表現もある種の線型代数的データ (Breuil 加群, Kisin 加群, Liu 加群) で分類される. しかし、その分類データから対応する  $G_K$  表現の情報を取り出すことは、 $K$  の絶対分岐指数が小さい時を除いて困難なことが多かった. その理由としては、一つ目に、絶対分岐のもとでは  $K$  に標準的な素元が存在しないために分類データの係数環が巨大になること、二つ目に、楕円曲線の標準部分群の存在を初めとする、絶対分岐特有の微妙な現象が起きること、が挙げられる. そのため、研究開始当初の段階では、幾何学的 torsion 表現を分類する整  $p$  進 Hodge 理論はほぼ完成していたものの、分類を使って torsion 表現の微妙な性質を調べる研究は未発展であった.

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、整  $p$  進 Hodge 理論における分類データの分岐理論を構築することにより、幾何学的 torsion  $G_K$  表現の微妙な性質を解析することであった. 代数的整数論における、局所体  $K$  の有限次 Galois 拡大  $L$  に対する分岐理論とは、整数環  $O_L$  の mod 素元巾を全て考えることによって  $L/K$  の Galois 群にフィルトレーションを入れ、拡大  $L/K$  における素元の分解の微妙な様子を記述するものである. 本研究ではこの古典分岐理論の類似として、整  $p$  進 Hodge 理論における分類データの (適当な意味での) mod 素元巾を全て考えることで、分類データに伴う幾何学的 torsion  $G_K$  表現の微妙な性質を調べることを目的としていた.

本研究の具体的な目的は次の四点であった.

- (1) 分類データの分岐理論の構築.
- (2) 分類データに伴う Galois 表現の半単純化の記述.
- (3) 分類データに伴う Galois 表現の分岐の解析.

- (4) 保型形式に伴う Galois 表現への応用.

$p$  進 semi-stable または crystalline 表現  $V$  に伴う mod  $p$  表現に現れる従順指標を  $V$  の不変量で記述することは、近年整  $p$  進 Hodge 理論における中心的な問題となりつつある. (2)ではこの近年の興味の高まりに先駆けて、分類データの分岐理論によって半単純化を記述することを目的にしていた. 分岐理論が半単純化を記述するという原理は、研究代表者の以前の研究で有限平坦群スキームの場合に得られていたものであった. また、(3)では、分類データの分岐理論を用いて、torsion crystalline 表現の分岐の良い上界を求めることを目的にしていた. このような良い上界が存在するという予想は Fontaine が 1980 年代に提出していたが未解決のままであった. (4)では、(2)を保型形式に伴う mod  $p$  Galois 表現に適用して、そこに現れる従順指標を保型側の情報で統制することを目的にしていた.

## 3. 研究の方法

整  $p$  進 Hodge 理論における分類データの分岐理論を構築するための手法は、まず分類データから何らかの局所体の整数環上の有限平坦完全交差代数  $R$  を取り出し、 $R$  に対して Abbes-斎藤による有限平坦完全交差代数の分岐理論を適用する、というものである.  $R$  はもとの分類データに伴う torsion  $G_K$  表現を反映したものである必要がある. Abbes-斎藤の分岐理論によると、完備離散付値環上の有限平坦完全交差代数  $R$  の mod 素元巾を全て考えることで、 $R$  の生成ファイバーが与える Galois 表現にフィルトレーションを入れることができる. このフィルトレーションを使ってもとの分類データに伴う torsion  $G_K$  表現を調べる、というのが本研究における中心的なアイデアである.

分類データに対して、それに伴う Galois 表現を統制する有限平坦完全交差代数  $R$  を構成した後、(2)を考察するために  $R$  に何らかの群構造を入れる必要があった. これは、研究代表者の以前の考察や先行研究から、「分岐 = 半単純化」という原理が成立するためには  $R$  の管状近傍の特殊ファイバーに群構造が入っている必要がある、ということが分かっていたからだった.  $R$  の生成ファイバーには、分類データから来る群構造が入っているため、それを  $R$  の管状近傍に伸ばす方法を模索することで(2)に関する研究を

行った。

分類データに伴う有限平坦完全交差代数  $R$  は、基礎体  $K$  の整数環  $O_K$  上定義されているとは限らない。当初の計画では、 $K$  に素元の  $p$  巾乗根を添加した体  $K_1$  の整数環上に  $R$  を構成することになっていた。(3)では、 $K_1$  の整数環から  $O_K$  に  $R$  を Weil 制限することで、分類データに伴う本来の Galois 表現を完全に復元できる代数を構成し、それに対して有限平坦完全交差代数の分岐理論を適用することで分岐の評価を得る計画だった。

#### 4. 研究成果

初年度の研究により、研究目的の(1)(2)は達成できた。一方で、二年目に行った(3)(4)についての研究では当初の最終目標を達成できなかった。しかし、(1)(2)を解決した新しいアイデアに基づいて(3)についての研究を実施し、分岐の解析を等標数局所体に帰着させる新手法を開発した。さらに、その手法の応用として、 $p$  進 Siegel 保型形式の基礎理論に関する成果が得られた。従って、幾何学的 torsion Galois 表現に対する分岐理論の構築、という当初の中心課題は一定の成功を見たと言える。

具体的な研究成果について述べる。本研究のポイントは、整  $p$  進 Hodge 理論の分類データから何らかの有限平坦完全交差代数を取り出すことであった。初めは計画通り、 $K_1$  の整数環上に適切な有限平坦完全交差代数を構成する、というアイデアを追及したが思ったような結果が得られなかったため、その代わりに、等標数の局所体の整数環上で同じ構成を行う、という新しいアイデアで研究を実施した。その結果、懸案だった  $R$  への群構造の導入に成功し、これによって研究目的(2)の Galois 表現の半単純化の分岐理論的統制に成功した。この結果は後述の分岐対応定理とともにプレプリントとして公表したが、内容の統一性のために投稿版からは削除し、論文投稿はさらなる研究の発展を待ってからすることにした。

二年目の研究では、この等標数への移行と言う新しいアイデアを用いて研究目的(3)を考察し、幾何学的 torsion 表現の一種である有限平坦表現の分岐を簡明に記述する新しい方法を開発した。具体的には、 $G_K$  の有限平坦表現の分岐と、

等標数局所体の有限平坦表現の分岐が完全に一致する、という『分岐対応』定理を証明できた。さらに、この定理の応用として、Abel 多様体の標準部分群の存在定理の、知られている中で最強の結果を証明した。標準部分群の理論は  $p$  進 Siegel 保型形式の基礎理論であり、近年欧米の研究者たちにより著しく研究が進んでいる。本研究ではそれらの先行研究とは独立に、分岐対応という、幾何学的 torsion 表現の分岐理論の新しい手法を用いて先行研究より強い結果を得たという点で大きなインパクトがある。これら二つの研究成果については論文を作成しプレプリントを公表した上で雑誌に投稿済みである。また、前述の分岐対応定理と合わせて、韓国高等研究所、北海道大学、京都大学数理解析研究所等で研究発表も行った。

今後の展望について述べる。一年目に得た幾何学的 torsion Galois 表現の半単純化の分岐理論的統制は、 $p$  進 crystalline 表現の  $\text{mod } p$  還元の記事への応用が期待される。また、分岐対応の理論は有限平坦表現だけでなくより広いクラスの表現についても成立すると考えられており(平之内氏・田口氏の予想)、分岐対応理論の今後の進歩によって、混標数では証明が困難だった様々な主張を等標数に帰着して示す、という新しい手法の発展が期待される。

本研究で得られた、混標数と等標数の間の分岐の対応、という手法は 1980 年代にノルム体の理論として知られていた古典的事実の幾何学的 torsion 表現における一般化に当たる。2011 年に入って Scholze 氏が、ノルム体の理論の別の一般化として、混標数と等標数の間のエタール・サイトの一致の理論を発表したが、これらの異なる標数間の対応理論は今後の数論幾何の新しい一潮流をなすと思われる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 5 件)

- ① 服部 新, 等標数と混標数の有限平坦群スキームの分岐対応, 代数的整数論とその周辺, 2010 年 12 月 6 日, 京都大学数理解析研究所.
- ② 服部 新, 有限平坦群スキームの分岐群と

canonical subgroup, 数論幾何学セミナー,  
2010年12月2-3日, 北海道大学.

- ③ Shin Hattori, Ramification correspondence of finite flat group schemes of equal and mixed characteristics, Industrious Number Theory 3, 2010年11月12日, 韓国高等研究所.
- ④ 服部 新, Ramification correspondence of finite flat group schemes of equal and mixed characteristics, 代数学セミナー, 2010年9月10日, 九州大学.
- ⑤ 服部 新, 有限平坦群スキームの分類理論と分岐対応, 香川セミナー, 2010年9月4日, 香川大学.

[その他]

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~shin-h/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

服部 新 (HATTORI SHIN)  
九州大学・数理学研究院・助教  
研究者番号: 10451436