

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 29 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21740024

研究課題名（和文） 種々のゼータ関数の解析的性質について

研究課題名（英文） Analytic properties for several types of zeta-functions

研究代表者

中村隆 (NAKAMURA TAKASHI)

東京理科大学・理工学部・助教

研究者番号：50532355

研究成果の概要（和文）：種々のゼータ関数に対して、普遍性、混合普遍性、自己近似性に関する研究を行った。

研究成果の概要（英文）：I obtained some results of universality, hybrid universality and self-approximation for several types of zeta-functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：ゼータ関数、値分布、多重ゼータ関数、強再帰性、普遍性

1. 研究開始当初の背景

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の発端は Euler による 1775 年の論文である。現在、量子群や結び目不変量、数論幾何学など多方面との関連により、Euler-Zagier 型多重ゼータ値、即ち変数が全て自然数である場合が注目されるようになった。Riemann ゼータ関数の普遍性とは、任意の零点を持たない正則関数は Riemann ゼータ関数の虚部方向の平行移動 $\zeta(s+i\tau)$ により一様に近似でき、さらに近似できる τ の密度は正になるという定理である。これは 1975 年に Voronin によって証明された。Riemann 予想は Riemann ゼータ関数が自己近似性を持つ、即ち Riemann ゼータ関数の虚部方向の平行移動 $\zeta(s+i\tau)$ により Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ が近似される、と同値である。多重ゼータ関数に関連する重要な論文は非常に多くあるので、ここでは次の 2 つのサー

ベイを挙げておく。多重ゼータ値、主に値の関係式について：M. Kaneko, Multiple zeta values, Sugaku 54, no. 4, 404-415 (2002), 多重ゼータ関数の解析的性質について：K. Matsumoto, The analytic theory of multiple zeta-functions and its applications, Sugaku 59, 24-45 (2007).

Euler 積を持つゼータ関数の普遍性については J. Steuding, Value-distribution of L-functions, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1877, Springer, 2007, 一方、Euler 積を持たないゼータ関数の普遍性については A. Laurincikas and R. Garunkstis, The Lerch zeta-function, Kluwer Academic Publishers, 2002 に詳しくまとめられている。

2. 研究の目的

研究内容は大きく3つに分けられる。

(1) 多重ゼータ関数の値の明示公式, 値の関係式, 関数関係式, (2) ゼータ関数の値分布, 主に普遍性, (3) その他の研究. これら3つの研究の方向からゼータ関数の解析的性質を明らかにすると同時に, ゼータ関数の性質を数論へ応用することを研究目的としている。

多重ゼータ値の関係式は *regularized double shuffle relation* により完全に記述されるといふ予想が多くの研究者により提出されている. 同様なことを *Witten* のゼータ関数についても考え, それを如何に定式化するかという問題を考える. *Witten* のゼータ関数は *Euler-Zagier* 型多重ゼータ関数を含むので, この問題は多重ゼータ値の場合に比べ, 遙かに困難になることが予想されるが, *derivation relation*, *regularized double shuffle relation*, 川島関係式等を用いることにより解決できると考えている。

異なる研究の方向として, *Witten* ゼータ関数に対して和公式あるいは大野関係式のような美しい関係式の探求が考えられる. これは *regularized double shuffle relation* 等により, 何故関係式が存在するかについての解答を与え, その一方で大野関係式のような関係式を具体的に構成するという多重ゼータ値の研究に対応している。

また *Witten* ゼータ関数の関係式を多重ゼータ値の正規化の一つの方法と考えることにより, 多重 L 値についても値の明示公式, 値の関係式などの多くの事実が理解されることは確信している. さらに *Witten* ゼータ関数の関数関係式を代数的に定式化することにより, 多重ゼータ値, 多重 L 値の関係式に新たな定式化を目標としている. また *Witten* ゼータ関数の関数関係式の研究について小森, 松本, 津村氏らの研究との関連も考える予定である。

さらなる研究として多重ゼータ値, 多重 L 値の超越性などを明らかにする予定である. 多重ゼータ値の巡回的な和は, *Witten* ゼータ関数の関数関係式からも導かれることもあるので, 新たな多重ゼータ値に関連する特殊値の超越数論的性質の発展が期待できる. このゼータ値の超越性は研究内容(3)に関連する. *Witten* ゼータ関数の特殊値の数論的性質を研究する予定である。

次に研究内容(2)について述べる。

概周期性, 自己近似性, 普遍性は多重ゼータ関数を含むどこまで一般のゼータ関数に拡張できるかという問題が生じる. この問題は多重ゼータ関数の値分布に関して, 基本的かつ重要な問題であると筆者は確信している. その一方で, これまでに同時普遍性の非存在の証明を行ってきたのと同様の手法により,

概周期性と自己近似性の非存在についても研究する予定である. *Euler* 積を持たない *Lerch* ゼータ関数等は, *Riemann* 予想を充たさない, 即ち $1/2 < \Re(s) < 1$ で零点を持つにもかかわらず, 普遍性から直ぐに自己近似性が従う. このように *Euler* 積を持つ, あるいは持たないゼータ関数の値分布を比較研究することにより, *Euler* 積が値分布に如何に影響するかについても考察する予定である. このように *Riemann* ゼータ関数 (*Dirichlet* L 関数等)の普遍性と自己近似性の研究は一般化された *Riemann* 予想と密接に関係しているので, 一般化された *Riemann* 予想をより深く理解することを目的としている。

3. 研究の方法

(1)の研究についてであるが, 筆者は多重ゼータ関数を値の関係式でなく, 関数の関係式として研究することに特色がある (関数関係式は津村氏により発見され, その後松本氏と小森氏と津村氏によりさらに発展されたことを注意しておく). 多重ゼータ値の研究は広く海外でも行われているが, 関数の関係式としての解釈は一般的でないので, この視点は貴重であると筆者は考えている. また *Witten* ゼータ関数の関係式と *Euler-Zagier* 型多重ゼータ関数の負の整数点を研究することにより, これらの関数等式についての証明ができることも予想される. これは *Euler* が *Riemann* ゼータ関数の研究で負の整数点を考察したことにより, 関数等式の発見につながったということに着想を得ている. \yen

(2)の研究については, 同時普遍性の応用として関数の独立性が示され, *Lerch* ゼータ関数の関数関係式により同時普遍性の非存在が証明されるので, このように普遍性の存在と非存在を同時に研究するところに筆者の独創性があると考えられる. また多重ゼータ関数の値分布, 特に同時普遍性の存在と非存在の研究については筆者により始まったといっても過言ではないので, ここにも筆者の独創性があると思われる. *Riemann* 予想と同値である自己近似性の一般化は筆者により定義され, その存在も証明された。

4. 研究成果

論文①はポーランドの若手数学者 *Pankowski* 氏との共同研究である. この論文において, エスターマンゼータ関数などの数論的関数に関連するゼータ関数, 特別な概均質ベクトル空間のゼータ関数, 2重又は3重 *Euler-Zagier* 型多重ゼータ関数の普遍性, 特にパラメーターが有理数である場合を証

明した。この論文により混合普遍性の全く新たな応用が見出されたと考えている。

出版された順番は逆になっているが、これは論文①の続編である。①ではゼータ関数の一次結合を扱っていたが、この論文では多項式の場合を示した。それにより、多くの多重ゼータ関数が、条件付きではあるが普遍性をもつことが証明された。

論文③では Lerch ゼータ関数の一次結合の普遍性を示した。この結果により Kaczorowski, Laurincikas, Steuding 氏等の定理に必要であった仮定を弱めた。さらにその応用として Tornheim-Hurwitz 2重ゼータ関数の普遍性を証明した。

論文④では Steuding クラスと呼ばれる L 関数に対して同時普遍性を示した。これは論文 [12] の一般化であり、多次元化であり、証明の簡略化にもなっている。さらに普遍性と自己再帰性の同値性を書き換え、一般化された自己再帰性と一般リーマン予想との関連について考察した。

Riemann ゼータ関数は殆ど全ての実数パラメーター d に対して、一般化された自己近似性を持つことが証明され、その後 Pankowski 氏により d が無理数であるときの自己近似性が証明された。論文⑤では残された d が 0 でない有理数である場合を証明した ($d=0$ である場合は Riemann 予想と同値である)。Garunkustis 氏もこの結果を独立に証明したことを注意しておく。

論文⑥では反転公式を導入することにより、ある種のゼータ値の明示公式、超越性等のよく知られた結果の証明を簡略化した。さらに digamma 関数を拡張し、パラメーター z が 1 でない代数的数ならば、一般化された digamma 関数の有理点での値は超越数であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① 中村隆, Lukasz Pankowski, On universality of linear combinations of L-functions, Monatshefte fuer Mathematik. 165 (2012), no.3, 433-446.

② 中村隆, Lukasz Pankowski, Applications of hybrid universality to multivariable zeta-functions, J. Number Theory, 131 (2011), no.11, 2151-2161.

③ 中村隆, The universality for linear combinations of Lerch zeta functions and the Tornheim-Hurwitz type of double zeta functions, Monatshefte fuer Mathematik, 163 (2011), no. 2, 167-178.

④ 中村隆, Some topics related to universality of L-functions with an Euler product, Analysis 31 (2011), no. 1, 31-41.

⑤ 中村隆, The generalized strong recurrence for non-zero rational parameters, Arch. Math. (Basel) 95 (2010), no. 6, 549-555.

⑥ 中村隆, Some formulas related to Hurwitz-Lerch zeta functions, The Ramanujan Journal 21 (2010), no. 3, 285-302.

[学会発表] (計 4 件)

① 中村隆, Lukasz Pankowski(講演者は Pankowski), Zeros of multiple zeta functions, The Fifth International Conference in Honor of J. Kubilius, Conference Center of Vilnius University, Lithuania, 2011. 9.9.

② 中村隆, Takahiro Aoyama, (講演者は T.~Aoyama, Multidimensional zeta distributions and infinite divisibility, The Fifth International Conference in Honor of J. Kubilius, Conference Center of Vilnius University, Lithuania, 2011. 9.8.

③ 中村隆, Zeros and universality for the Euler-Zagier-Hurwitz type of multiple zeta functions", Zeta Function Days in Seoul, Yonsei University, Korea, 2009. 9.2.

④ 中村隆, The joint universality and the generalized self-similarity for L-functions, 2009 Graduate Workshop on Zeta Functions, L-Functions and their Applications, Utah Valley University, USA, 2009. 6.4.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/tn/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者 ()

研究者番号：

(2) 研究分担者 ()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：