様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　１日現在

機関番号：２５４０３
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009　～　2012
課題番号：21740027
研究課題名（和文）　正標数の代数幾何学をめぐる諸問題

研究課題名（英文）　Problems on algebraic geometry in positive characteristic

研究代表者
齋藤　夏雄　（SAITO NATSUO）
広島市立大学・情報科学研究科・講師
研究者番号：70382372

研究成果の概要（和文）：代数幾何学における正標数特有の現象について研究を行った．特に，標数 p>0 の代数的閉体 k 上で定義された 3 次元多様体で，高々標準特異点しか持たないものの局所的な構造を調べた．p>2 で X の一般超平面切断が高々有理特異点しか持たないと仮定したとき，X の余次元 2 の局所的構造を定義方程式のレベルで明らかにした．その結果として，このような多様体の余次元 2 の特異点は，p=3 における 2 つの例外を除けば，有理二重点と非特異曲線の直積と解析的に同型であることを示した．

研究成果の概要（英文）：We study various phenomena peculiar to positive characteristic on algebraic geometry. Especially, we investigated local structure of a three dimensional variety X defined over an algebraically closed field k of characteristic p>0 with at most canonical singularities. Under the assumption that the p>2 and a general hyperplane cut of X has at most rational singularities, we showed that local structure of X in codimension two is well understood in the level of local equations. Consequently, we found that any singularity of such a variety X in codimension two is analytically a product of a rational double point and a nonsingular curve with two exceptions in p=3.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：正標数、代数多様体、特異点、変形理論

１．研究開始当初の背景

(1) 代数多様体の分類理論

代数多様体をいくつかの基本的な不変量によって分類することは，代数幾何学における重要な命題である．代数曲面の分類理論は 20 世紀中頃までに得られていたが，3 次元代数多様体には 2 次元までには生じなかった特異点の問題が立ちはだかり，解決には本質的に新しいアイデアが必要であった．これに答えを出したのが，森・川又・Reid・Shokurov・Kollár などの貢献によって 1980 年代末に構築されたいわゆる極小モデルプログラム(MMP) であり，基礎体が複素数体，もしく

は標数 0 の代数的閉体であるとき，3 次元代数多様体の分類理論は一応の完成を見ることとなった．さらに最近になって Hacon と McKernan らは，フリップ存在定理や標準環有限生成定理など，MMP にとってきわめて重要な定理を任意次元において証明し，複素数体上における高次元代数多様体の分類理論は新たな段階を迎えている．

このように複素数体上の代数幾何学が発展を続けているのに対し，正標数の代数的閉体上の代数幾何学の研究は長い間立ち後れていた．消滅定理や Bertini の定理など，代数幾何学における基本的な定理が正標数で成り立たないことが背景にあるが，一番の障害は特異点解消定理が未だに証明されていないことであった．極小モデルプログラムを走らせるうえで必要な端末特異点や標準特異点といった概念は，いずれも特異点解消の存在を前提として定義されているためである．しかし本研究を開始するころには正標数の特異点解消についても進展が出てきており，正標数の代数幾何学が大きく発展する気運が高まってきていた．

⑵ Fano 多様体と Calabi-Yau 多様体

前項のように MMP が進展する過程でその重要性が明らかになってきたのが，Fano 多様体と Calabi-Yau 多様体である．複素数体上の滑らかな Fano 多様体については Iskovskikh, Shokurov らによる研究を経て森・向井により 80 年代までに完全に分類され，現在は端末特異点を持つ Fano 多様体が活発に調べられている．また竹内は森による端射線の分類定理をうまく応用し，Picard 数 1 の Fano 多様体についてスマートな分類方法を提示した．一方 Calabi-Yau 多様体についても，ミラー対称性と呼ばれる神秘的な性質があることが分かり，代数幾何学のみならず理論物理学においても重要なクラスであることが明らかになっている．

Fano 多様体と Calabi-Yau 多様体に関する研究も正標数では進展が後れていたが，1990 年代後半に Shepherd-Barron が，標数 0 における竹内の議論を適用して Picard 数 1 の 3 次元 Fano 多様体を分類するなどいくつかの重要な結果を導いた．また Megyesi もほぼ同じころ，藤田による Δ-種数の理論を用いて Fano 指数が 2 以上の 3 次元 Fano 多様体をほぼ完全に分類した．

⑶ 研究開始時点で得られていた研究成果

前項のような状況において，研究代表者は Picard 数 2 の Fano 多様体について，端射線の収縮を数値的に調べることにより，森-向井の手法を正標数の場合に適用することに成功し，これらが 36 のクラスに分類されることを示した．また，森重文氏との共同研究により，ワイルドな超曲面束と呼ばれる正標数独特の構造に注目し，3 次元 Fano 多様体でワイルドな 2 次曲線束の構造が入り得るクラスを完全に決定した．また Calabi-Yau 多様体についても，研究代表者は伊藤浩行氏・廣門正行氏との共同研究により，標数 2 と 3 の代数的閉体上において，2 つの準楕円曲面の射影直線上のファイバー積から超特異な Calabi-Yau 多様体を構成することに成功した．さらに得られた多様体が持ち上げ不可性や滑らかでないファイブレーション構造など，標数 0 では起こり得ない特徴を持っていることも明らかにした．また，多様体を構成する過程においてファイバー積上に生じた特異点のうちのいくつかは，1 次元の軌跡を持つ標準特異点でありながら，有理二重点の自明なファミリーとなっていないことも判明した．

２．研究の目的

これまでの研究をふまえ，正標数の代数的閉体上定義された代数多様体について，複素数体上では起こり得ないような正標数特有の現象を調べること，特に低標数の場合における病理的な現象を徹底的に解析することを目的とした．具体的には，局所的視点からの研究として

○正標数における標準特異点の構造の解明，特に有限個の点を除いた 3 次元標準特異点の完全な分類

○低標数の場合を中心とした有理二重点の変形空間の構造の決定

をテーマとした．標準特異点は MMP における重要な概念の一つであり，正標数において MMP を考えるうえでその性質を明らかにすることは，きわめて重要であると考えたためである．一方，大域的視点からの研究としては

○持ち上げ不可性，滑らかでないファイブレーション構造など低標数において特殊な性質を持つ多様体の構成，特に Calabi-Yau 多様体の場合における可能性の特定

○準楕円曲面の構造射を与えるような多重標準因子線形系の決定

○分類理論の障害となるような病的な構造を持った del Pezzo 曲面および 3 次元 Fano 多様体の構造解析と特徴付け

を行うことを目的とした．これらはこれまでに研究代表者らによって得られた結果の延長線上にあり，さらに深く掘り下げようとするものである．

こうした両視点からの研究をリンクさせることで，正標数の代数的閉体上における「病的な」多様体を系統的な形で記述することを目指した．

３．研究の方法

正標数において各有理二重点の変形空間の構造は Artin によってすでに得られているので, そこでの equisingular な部分空間の次元と構造を，Greuel-Kröning による単純特異点についての手法を応用した局所的な計算によって調べた．すでにこれまでの研究の過程において，標数 2 と 3 において 1 次元の非自明な equisingular な変形空間を持つ特異点の例が存在することが確認されており，方程式の記述を観察することで，これらが変形空間の部分空間としてどう埋め込まれているかを調べた．こうした作業をすべての有理二重点について行った．また，これまで得られた例は Frobenius 射による引き戻しを十分行うことで自明な変形に帰着されることが分かっており，次元を持つ equisingular な空間がすべてこうして構成されるかどうかも調べた．一方，標数が 5 以上の場合は equisingular な空間の存在は確認されていなかったので，その例を構成することも試みた．

また桂と上野により詳細な研究結果が得られている楕円曲面の多重標準線形系に関する問題を，正標数の体上でのみ存在する準楕円曲面について考えた．彼らの手法を適用することで，線形系の多重度と準楕円曲面の構造についての関係について何らかの結果を得られないか考察した．

一方，病理的構造を持った del Pezzo 曲面および Fano 多様体の研究として，まず反標準因子の一般メンバーがすべて超特異楕円曲線になってしまうような del Pezzo 曲面の特徴付けを考えた．すでに本間や Beauville によって次数 3 の del Pezzo 曲面については特徴付けが得られていたので，次数 2 以下の曲面について考察を行った． 3 次元 Fano 多様体についても, Shepherd-Barron による結果を吟味することで，正標数特有の性質を持つ 3 次元 Fano 多様体を特徴付けることを目指した．

４．研究成果

(1) 有理二重点の変形空間について

まず有理二重点の変形空間において，equisingular な部分空間を持つような有理二重点についての研究を行った。当初は Greuel-Kröning の手法を用いて，ファイバーが特殊ファイバーと同じ特異点を持つような空間を調べていたが，解析を進めるうちに Tjurina 数タウから定まる階層によって定義されるタウ一定軌跡という概念を導入すると見通しがよりよくなることが明らかになった．正標数のすべての有理二重点に対してタウ一定軌跡と equisingular な空間の計算を試みたところ，標数が 3 以上のすべての特異点について，構造を完全に決定することができた. 特に, 3 次元標準特異点に関して，以下のような定理を得た．

定理　k を標数 $p>0$ の代数的閉体とし, X を k 上定義された 3 次元正規多様体で高々標準特異点を持つものとする．このとき，以下のことが成り立つ．

i) X は余次元 2 において Cohen-Macaulay である．

ii) $p>2$ とし，X の一般超平面切断が高々有理特異点しか持たないとする．このとき，X のある 0 次元部分多様体 Z が存在して, Z に属さない X の点 x に対し，完備局所環 $\hat{O}_{X,x}$ は正則であるか，以下のいずれかに同型になる：

a) 有理二重点の自明な変形

b) $k[[x,y,z,w]]/(z^2+x^3+y^4+y^3w)$
（p=3 のときのみ）

c) $k[[x,y,z,w]]/(z^2+x^3+y^4+x^2y^2+y^3w)$
（p=3 のときのみ）

上の定理 ii)の b)と c)においては, 各ファイバー上ではそれぞれ特異点として E_6^0 と E_6^1 が現れる．これらはいずれも有理二重点の非自明な変形であり，標数 0 の多様体上では起こり得ない病理的な現象である．特に b)については，研究代表者らによって以前構成された 3 次元多様体上にすでに存在することが確認されており，大域的な具体例もすでに得られている．一方，上記の定理により，標数が 5 以上であれば，3 次元正規多様体の標準特異点は，有限個の点を除けば標数 0 の場合と同じように有理二重点の自明な変形で表されることも明らかになった．

以上の結果をまとめた論文が，2013 年に Journal of Algebra より出版された．

残されているのは標数 2 の場合であるが, A 型の特異点についてはすでに解決しているものの，D 型，E 型については計算が非常に煩雑であり，未だ解決には至っていない．これは今後の研究課題である．

(2) 準楕円曲面について

楕円曲面の多重標準線形系に関する問題に対して桂と上野がとった手法を応用し，小平次元 1 の準楕円曲面において，多重標準線形系が定める写像がいつ準楕円曲面の構造射を与えるかについて調べた．これまでの研究で，標数 3 においては多重度の最小値を完全に特定することができ，標数 2 においては楕円曲線上のある種の準楕円曲面の非存在に問題が帰着されることが明らかになった．残された問題に対し，準楕円曲面の準非分離な被覆として得られる有理曲面を考え，この曲面上で自己交点数が負の有理曲線の様子

を観察することで証明ができるのではないかと考えているが，未だ解決には至っていない．これは今後の研究課題である．

(3) del Pezzo 曲面と Fano 多様体について

次数の低い del Pezzo 曲面で，反標準因子の一般メンバーがすべて超特異楕円曲線になってしまうようなものの特徴付けを調べた．一般に del Pezzo 曲面は射影平面をその上のいくつかの点でブローアップすることで得られるが，これまでの考察により，このような del Pezzo 曲面を特徴付けると思われる射影平面上の点の配置を見出すことができたほか，これらの曲面が Fermat 型の方程式で記述されること，F-split でないという性質を持つと思われることも分かった．まだ厳密な証明は得られておらず，これらの考察を端緒として，引き続き研究を進めていく予定である．

また 3 次元 Fano 多様体については，直線で被覆されるという正標数特有の性質を持つ場合があることが Shepherd-Barron によって明らかにされている．これまでに見つかっているこうした例について調べると，いずれも反標準因子の一般メンバーが超特異 K3 曲面となっていることが分かった．これについても何らかの特徴付けが得られるのではないかと考えており，今後も考察を行う予定である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

Masayuki Hirokado, Hiroyuki Ito, <u>Natsuo Saito</u>, Three dimensional canonical singularities in codimension two in positive characteristic, Journal of Algebra, 373 (2013), 207-222. （査読あり）

<u>齋藤夏雄</u>，「正標数の有理二重点の変形について」，研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2011」報告集，2011，73-84. （査読なし）

〔学会発表〕（計 5 件）

<u>齋藤夏雄</u>，「正標数の有理二重点の変形について」，研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2011」，2011 年 11 月 4 日，高知大学

<u>齋藤夏雄</u>，"On the multicanonical system of quasi-elliptic surfaces"，アフィン代数幾何学研究集会，2010 年 9 月 4 日，関西学院大学

<u>齋藤夏雄</u>，「Quasi-elliptic surfaceとその応用」，代数幾何研究集会 2010，2010 年 7 月 17 日，法政大学

<u>齋藤夏雄</u>，"On the deformations of rational double points in positive characteristic"，「正標数の代数幾何」研究集会，2009 年 12 月 19 日，法政大学

<u>Natsuo Saito</u>, "Calabi-Yau 3-folds arising from fiber products of quasi-elliptic surfaces"，1st PRIMA Congress, 2009 年 7 月 7 日, The University of New South Wales, Sydney, Australia.

６．研究組織

(1)研究代表者

齋藤　夏雄　（SAITO NATSUO）
広島市立大学・情報科学研究科・講師
研究者番号：70382372

(2)研究分担者　なし

(3)連携研究者　なし