様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25 年　6 月　24 日現在

機関番号：３２６２９
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2011
課題番号：２１７４００２８
研究課題名（和文）リー群上の球関数と保型エル関数の研究

研究課題名（英文）Study on spherical functions on Lie groups and automorphic L-functions

研究代表者
石井　卓（ISHII TAKU）
成蹊大学・理工学部・准教授
研究者番号：60406650

研究成果の概要（和文）：保型形式に付随するゼータ関数（保型Ｌ関数）の解析接続、関数等式といった基本的な性質を保型Ｌ関数の積分表示（ゼータ積分）によって確立するべく、実リー群上の一般化された球関数、すなわち保型形式のフーリエ展開に現れる特殊関数の明示公式を用いて、ゼータ積分のアルキメデス部分の計算を実行した。特に SO(2n+1)×GL(m)上の L 関数や GL(３)上の標準Ｌ関数に対して、アルキメデスゼータ積分と局所Ｌ因子の明示的な関係を見出し、局所関数等式を与えることにより大域的な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：The aim of our study is to establish fundamental results on zeta functions for automorphic forms (automorphic L-functions) such as the analytic continuations and the functional equations, through their integral representations (zeta integrals). Using explicit formulas for generalized spherical functions, that is, special functions appearing in the Fourier expansions of automorphic forms, we have computed archimedean zeta integrals. Especially we calculate the archimedean zeta integrals for the L-functions on SO(2n+1)×GL(m) and the standard L-function on GL(3) and obtained the local and the global functional equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：保型形式、保型Ｌ関数、Rankin-Selberg 法、Whittaker 模型、Whittaker 関数、主系列表現

１．研究開始当初の背景

保型Ｌ関数の解析的性質をその積分表示によって調べる手法は 1930 年代の Hecke らの仕事まで遡るが、70 年代から 80 年代にかけて Godement, Jacquet, Langlands, Piatetski-Shapiro, Shalika らにより一般線形群 GL(n)の保型Ｌ関数の積分表示による研究が大きく進展した。以降これまでに種々の保型Ｌ関数に対する積分表示が与えられてきた。しかしその研究の多くにおいては、悪い素点（分岐有限素点、無限素点）での局所ゼータ積分の取り扱いが十分ではなく、部分Ｌ関数についての結果のみになっていた。そのような状況を打破するべく 90 年代以降、織田孝幸氏のグループを中心に実簡約群上の一般化された球関数の明示公式の研究が活発に進められてきた。とりわけ実２次斜交群 Sp(2,R)上では、その様々な既約許容表現に対して Whittaker 関数、一般化 Whittaker 関数の明示公式が蓄積されていた。さらに森山知則氏、石井により GSp(2)上のスピノールＬ関数に対する Novodvorsky のゼータ積分の実素点における具体的な計算が行われ、大域的Ｌ関数の整型性が証明された。

また一般化された球関数の研究は、ユニタリ群 SU(n,1), SU(2,2)や例外群 G_2、さらにより高階の群 Sp(3,R)、SL(n,R)でも進められており、その明示公式が与えられていた。

２．研究の目的

保型Ｌ関数の性質を調べるための二大手法の一つとして知られる、保型Ｌ関数の積分表示による方法―いわゆる Rankin-Selberg 法―により、保型Ｌ関数の大域的性質を明らかにすることを目的とした。

この研究における最初の段階は、対象となる保型Ｌ関数を表すと期待される大域的ゼータ積分を発見し、それを大域的 Whittaker 関数などの積分変換で記述することである。Whittaker 模型のように重複度一定理が成立するような状況では、この大域的ゼータ積分は局所的ゼータ積分の積に分解する。そこで次の段階は各素点における局所ゼータ積分、すなわち Whittaker 関数など局所体上の一般化された球関数の積分変換、の解析である。

不分岐有限素点における球関数の明示公式は Whittaker 関数をはじめ様々な結果がある。これを用いて局所ゼータ積分と局所Ｌ因子の一致が示されると、所望のＬ関数の積分表示を得たということができる。これまでに種々の保型Ｌ関数に対して、その積分表示式が発見されており、この段階までの研究がなされている。

ところが既存の多くの研究では分岐有限素点、無限素点における局所ゼータ積分のさらなる解析がなされていないため、得られている結果は、これら悪い素点を除外した「部分」保型Ｌ関数に対するものにとどまってしまう。そこで本研究では、無限素点においても不分岐有限素点と同様に球関数の明示公式を用いて局所ゼータ積分具体的に計算することで、「完備化された」保型Ｌ関数の解析接続、極の位置、関数等式といった基本的な解析的性質を明らかにすることを目指していた。

３．研究の方法

以下の手順により、アルキメデスゼータ積分、すなわち無限素点における局所ゼータ積分の計算を行った。

Step １：　実簡約群上の一般化された球関数の明示公式を、局所ゼータ積分の計算に耐えうる形で与える。

Step 2:　一般化された球関数の積分変換である局所ゼータ積分を計算し、局所関数等式を示す。

各ステップについて概観する。Step１における実簡約群Ｇ上の一般化された球関数とはＧ の既約表現のある別の誘導表現の空間における実現をＧ上の特殊関数として記述したものであり、しばしば保型形式のフーリエ展開に現れる。表現論的手法により、一般化された球関数を特徴付ける偏微分方程式系を導出し、その解の積分表示式を与えることが Step1 の到達点である。明示公式の研究における困難さのひとつは、偏微分方程式系の解という多変数特殊関数をどのように記述するかという点にあるが、一般論はないため個々の状況に応じて考察することになる。局所ゼータ積分の計算と相性が良いのは、ガンマ関数の積商を被積分関数とする Mellin-Barnes 型の積分表示式であると考えられる。

もう一つの困難さは、Ｇ の極大コンパクト部分群Ｋの表現（保型形式の重さに相当するもの）の記述に起因する組み合わせ論的な問題にある。一般化された球関数はＫの表現空間上に値を取る（ベクトル値）関数であり、偏微分方程式系の導出にはＫの既約表現の詳細な記述を必要とする。

Step２の局所ゼータ積分の計算においては Barnes の補題といわれる古典的な積分公式が中心的な役割を果たすことが多い。Step １と同様に特殊関数の積分をどのように計算するかという問題と並行して、Ｋ タイプの問題、すなわち表現空間内のどの元に対して一般化された球関数の積分変換を行うかが問題になってくる。保型形式の重さの整合性の問題と思うこともできる。しかるべき元に対して局所ゼータ積分を計算することにより、(表現の Langlands パラメータから決まる)期待される局所Ｌ因子が現れ、しばしば両者が一致する。局所ゼータ積分がいわゆるユニポテント積分を含む場合には、両者の間にずれ

が生じると考えられるが、そのずれ(Barnes積分などで記述される)の形から局所関数等式、極の情報などを得られると期待される。

４．研究成果

(1) 奇数次直交群 SO(2n+1,R)上のクラス1Whittaker 関数の明示公式〔雑誌論文②〕

B型古典群SO(2n+1,R)=SO(n+1,n,R)上のクラス１主系列表現に対するWhittaker関数の明示公式を得た。A 型の場合の Eric Stade氏との共同研究による結果(2007 年出版)と同様、SO(2n+1,R)の Whittaker 関数を、SO(2n-1,R)のWhittaker関数を含む積分で表すという、nについての帰納的な式を得たが、ここで用いた手法はA型のときとは異なっている。

まず偏微分方程式系の確定特異点のまわりでの級数解（第二種球関数と呼ぶ）のｎについての帰納的な式を求め、それを手がかりにクラス１Whittaker 関数（保型形式のフーリエ展開に現れるよい増大条件を満たす解であり、第一種球関数と呼ばれる）のMellin-Barnes 型積分表示を予想した。既に知られている第一種球関数を第二種球関数の線形結合で表す「展開公式」を援用することでこの予想した式を証明した。このような研究手法は他の球関数の研究においても有用であると考えられる。

(2) SO(2n+1)×GL(m), GL(n)×GL(m)のアルキメデスゼータ積分〔雑誌論文①〕

研究成果（１）で得られたクラス1Whittaker 関数の明示公式を用いて、SO(2n+1)×GL(m) (m=n,n+1,n-1)上のコンボリューション L 関数について、Piatetski-Shapiro, Rallis, Ginzburg らによるゼータ積分のアルキメデス部分を計算した。Barnes の補題を用いて証明される「G=SO(2n+1,R),GL(n,R)上のWhittaker関数と適当なガンマ関数の積を被積分関数とするBarnes積分が、G上のWhittaker関数と局所 L 因子の一部の積になる」という「Pieri型の公式」がゼータ積分の計算の鍵になる。この公式によりアルキメデスゼータ積分の間に(m,n)についての帰納的な関係があることが証明できた。m=n,n+1 のときはアルキメデスゼータ積分が期待される局所L因子の積に一致することが示された。

GL(n)×GL(m) (m=n,n-1,n+1)上のL関数に対してはStade氏が既にアルキメデスゼータ積分と局所L因子の一致を示しているが、本論文ではPieri型公式を用いた新しい証明を与えた。

また二つの群の階数の差が 2 になるSO(2n+1)×GL(n-1)、GL(n)×GL(n-2)上の L関数に対しては、ユニポテント積分の存在によりアルキメデスゼータ積分は局所L因子とは一致せず、局所 L 因子と Barnes 積分の積になるが、Barnes積分の形から局所関数等式を証明した。

さらに上記の計算と不分岐有限素点における計算との類似性も見出した。Pieri 型の公式と呼ぶ理由は、p 進体上の GL(n)のクラス 1Whittaker 関数に対する同様の公式がGL(n,C)の有限次元表現における Pieri の公式に他ならないからである。不分岐有限素点での計算に注目することが、アルキメデスゼータ積分の計算において有用になり得ると思われる。

(3) GL(3)の標準L関数に対するアルキメデスゼータ積分〔雑誌論文③〕

GL(3)の尖点保型表現の無限素点成分に現れる既約表現、すなわち GL(3,R)、GL(3,C)の（一般）主系列表現に対するWhittaker関数の明示公式は、織田孝幸氏、平野幹氏、宮崎直氏、石井らによって得られていた。これを用いて、GL(3)の標準 L 関数に対するJacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika による積分表示の実素点、複素素点における計算を実行した。アルキメデスゼータ積分はユニポテント積分を含んでいるため、局所L因子と Barnes 積分の積になるが、局所関数等式を得ることができた。これにより GL(3)の標準L関数の関数等式の別証明を与えたことになる。GL(3)×GL(2)のL関数については、実素点におけるゼータ積分の計算を実行し、GL(3)、GL(2)の尖点保型表現に寄与する全ての場合にゼータ積分と局所L因子が一致するようなWhittaker関数の組を明示的に与えた。

(4) SL(n,R)の主系列Whittaker関数の明示公式

これまでに織田孝幸氏らとの共同研究で、SL(3,R)、SL(4,R)のクラス１とは限らない主系列表現の極小Ｋタイプに属する Whittaker関数の明示公式を与えたが、これを一般のSL(n,R)に拡張した。クラス１Whittaker関数と異なりベクトル値の関数となるため、組合せ論的な困難さが生じる。偏微分方程式系を導出し、(1)と同様の手法を用いた。明示公式はクラス１Whittaker 関数の場合の拡張になっているが、主系列表現の複雑さを表す「ヘリシティ」というパラメータと、群の実階数の二つの整数の組についての帰納的な関係式になっている。この結果は論文“Taku Ishii and Takayuki Oda; Calculus of principal series Whittaker functions on

SL(n,R)”
にまとめて投稿した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Taku Ishii and Eric Stade, Archimedean zeta integrals on GL_n × GL_m and SO_{2n+1} × GL_m, Manuscripta Mathematica 141 (2013), 485-536, 査読有, DOI:10.1007/s00229-012-0581-y

② Taku Ishii, Whittaker functions on orthogonal groups of odd degree, Journal of Lie Theory 23 (2013), 85-112, 査読有, http://www.heldermann.de/JLT/JLT23/jlt23.htm

③ Miki Hirano, Taku Ishii and Takayuki Oda, The Archimedean Whittaker functions on GL_3, Geometry and analysis of automorphic forms of several variables, 77-109, Series on Number Theory and Its Applications: volume 7, World Scientific Publication, Hackensack, NJ, 2012, 査読有, http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8192

④ Taku Ishii, Whittaker functions on real semisimple Lie groups of rank two, Canadian Journal of Mathematics 62 (2010), 563-581, 査読有, DOI:10.4153/CJM-2010-030-4

⑤ Taku Ishii and Tomonori Moriyama, Uniqueness of generalized Whittaker models for GSp(2,R) and the outer automorphism group of Sp(2,R), 京都大学数理解析研究所講究録 1715 (2010), 121-126, 査読無, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1715-13.pdf

〔学会発表〕（計５件）

① Taku Ishii, Archimedean zeta integrals for automorphic L-functions, L-functions of automorphic forms and related problems, 東京大学数理科学研究科, 2012 年 3 月 10 日.

② Taku Ishii, Archimedean zeta integrals for exterior square L-functions on GL(4), 第 6 回福岡数論研究集会, 九州大学, 2011 年 8 月 24 日.

③ Taku Ishii, Calculus of archimedean zeta integrals for L-functions on GL(4),有界対称領域の算術商のコホモロジーとモジュラーサイクル, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2011 年 8 月 6 日.

④ Taku Ishii, リー群上の球関数とアルキメデスゼータ積分, 談話会, 京都大学, 2010 年 12 月 1 日.

⑤ Taku Ishii, Archimedean L-factors for automorphic L-functions, Number theory seminar, University of Colorado at Boulder, 米国, 2009 年 10 月 15 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

石井　卓（ISHII TAKU）
成蹊大学・理工学部・准教授
研究者番号：60406650