

機関番号：34304

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2010

課題番号：21740031

研究課題名（和文）剰余モジュラーガロア表現の普遍変形環と普遍モジュラー変形環の同型問題

研究課題名（英文）On isomorphism problems on universal deformation rings and universal modular deformation rings for residual modular Galois representations

研究代表者

山上 敦士（YAMAGAMI ATSUSHI）

京都産業大学・理学部・准教授

研究者番号：00440876

研究成果の概要（和文）： p -超特異的な場合に、無限な傾きをもつ楕円的固有形式の p -進解析的な無限族の構成問題を解決できた。また、 p -超尖点的な場合に、基底変換と有限な傾きをもつ Hilbert 固有形式の p -進解析的な無限族を組み合わせた方法や、四元数環上の保型形式と Jacquet-Langlands 対応を用いた方法では、無限な傾きをもつ楕円的固有形式の p -進解析的な無限族を構成できないことを証明できた。

研究成果の概要（英文）：In the p -supersingular case, I constructed p -adic analytic families of elliptic eigenforms of infinite slope. Also, in the p -supercuspidal case, I proved that it is impossible to construct any p -adic analytic family of elliptic eigenforms of infinite slope by the base change theory with p -adic analytic families of Hilbert eigenforms of finite slope, or the Jacquet-Langlands correspondence with automorphic forms on definite quaternion algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：代数的整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード： p -進保型形式、ヘッケ環、ガロア表現

1. 研究開始当初の背景

(1) 代数的整数論においては、代数方程式の有理解、あるいは代数体上で定義された代数曲線の有理点の振る舞いなどが主な研究対象であるが、これらを研究するうえで、そこに生ずる Galois 表現を深く研究することが重要なことである。

①その顕著な例として、1995年に発表された論文“Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem” (Ann. of Math. 141(1995))における、Wiles氏の「Fermatの最終定理」の証明が挙げられる。その論文で

鍵となったのは、ある種の楕円曲線に付随する Galois 表現が楕円的 Hecke 固有形式に付随することを、Galois 表現の変形理論を用いて、Taylor 氏との共著論文“Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras” (Ann. of Math. 141 (1995))で証明したことであった。

②さらに後年、彼らの手法を基礎として、Breuil, Conrad, Diamondそして Taylor 各氏の共著論文“On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : wild 3-adic exercises” (Journal of Amer. Math. Soc. 14

(2001)) において「志村-谷山予想」が解決されたことも、変形理論から Galois 表現の保型性を導くことの重要性を示す一例である。

(2) 私が現在まで一貫して取り組んできた研究課題は、Galois 表現の変形とその p -進的保型性に関して、Gouvea 氏により、彼の著書 “Arithmetic of p -adic modular forms” (Lecture Notes in Math., Vol. 1304, 1988) の中で定式化された次の予想を解決することであった:

① 「Gouvea の予想」

p を奇素数, k を標数 p の有限体, G を有理数体 Q の絶対 Galois 群とし, ρ を G の k 上の絶対既約でモジュラーな剰余 Galois 表現とする. ρ に対し, k を剰余体にもつ完備局所 Noether 環への ρ の変形達の間で普遍的 (Mazur 氏により構成された) 普遍変形環を R , その変形の中で特に (Katz 氏により定式化された) p -進 Hecke 固有形式に付随するものの中で普遍的 (Gouvea 氏により構成された) 普遍モジュラー変形環を T とする. このとき, R から T への自然な全射は同型写像であろう. すなわち, ρ の全ての変形は p -進 Hecke 固有形式に付随するであろう.

② この予想に関して注意すべきことは, ここで主張される同型において R と T の, それぞれ対応する適当なイデアルで商をとることにより, 原理的に Wiles と Taylor 両氏の仕事に代表されるような Galois 表現の保型性を, 常に導くことができることである. その意味で, 代数的整数論において 「Gouvea の予想」の解決が与える影響は非常に大きいものといえる.

③ また, 非常に抽象的な可換環論の手法で構成された普遍変形環 R に対し, p -進保型形式の空間に作用する Hecke 環から構成された普遍モジュラー変形環 T と同型であることを通して, 幾何的な意味付けを与えるという点でも大きな意義を持つ主張である.

④ 一方, 代数的整数論において, 代数幾何的な研究対象に付随する L -関数についての定理を証明する際には, そこに生ずる Galois 表現の古典的保型性を得ることが鍵となることが多い. それに対し 「Gouvea の予想」では Galois 表現の p -進的保型性を主張しているので, L -関数にまつわる問題を p -進保型形式と古典的保型形式の関連性に帰着させる橋渡しとなることが, この研究の特色である.

(3) これまでの研究の成果として, 論文 “On Gouvea’s conjecture in the unobstructed case” (Journal of Number Theory 99 (2003), 120–138) において 「 ρ の変形問題が “unobstructed” である」という条件のもとで 「Gouvea の予想」を証明することができた. その一方で, 論文 “On the

unobstructedness of the deformation problems of residual modular representations” (Tokyo J. of Math. 27, No. 2 (2004), 443–455) において, 楕円の Hecke 固有形式 f の重さが 2 よりも大きいとき, 有限個を除き全ての素数 p に対して, f に付随する $\text{mod } p$ 剰余 Galois 表現 ρ の変形問題が unobstructed であることを証明できた. したがって, f の重さが 2 よりも大きな場合には, ほとんど全ての素数に対して 「Gouvea の予想」を解決できたことになる. さらに, 総実代数体 F 上の Hilbert Hecke 固有形式の p -進解析的無限族を構成する問題に関して, Chenevier 氏の論文 “Familles p -adiques de formes automorphes pour $GL(n)$ ” (J. reine angew. Math. 570 (2004)) において提示された, 有理数体 Q 上定義された代数群 $GL(n)$ 上の Hecke 固有形式からなる p -進無限族の構成法を, F 上定義された四元数環上の Hecke 固有形式に応用することで, 論文 “On p -adic families of Hilbert cusp forms of finite slope” (Journal of Number Theory 123 (2007), 363–387) において部分的に解決することができた.

2. 研究の目的

(1) 以上の研究の背景を踏まえて, 私の 2009 年度から 2010 年度にかけての研究目的は, 総実代数体 F 上で展開される代数的整数論の諸問題への応用を期待し, 剰余 Galois 表現 ρ が楕円の Hecke 固有形式に付随している場合のみならず, F 上の Hilbert Hecke 固有形式に付随している場合へと 「Gouvea の予想」を拡張して解決することであった. この問題に関しては, Boeckle 氏の論文 “On the density of modular points in universal deformation spaces” (Amer. J. of Math. 123 (2001)) の序章において少し触れられている程度で, まだしっかりと定式化されていない未開拓の研究対象である.

(2) この研究を進めるにあたり, ρ の普遍変形空間内で F 上の Hilbert Hecke 固有形式に付随する点が稠密に存在していることを示すために, これまで用いていた Q 上での様々な手法を, 総実代数体 F 上へと拡張することが主な研究内容となる. (この稠密性が R と T の同型を引き起こすことになる.) しかし, このような研究は今までに試みられた例がほとんどないと思われるため, 既存の Q 上の手法を単に F 上に拡張するという方針を越えて, 全く新しい手法をあみだすことが必要となるかもしれない. その意味でも, 非常に独創的な研究になると思われる.

3. 研究の方法

(1) 研究目的の達成に向けての研究方針は, 論文 “On Gouvea’s conjecture in the

unobstructed case” (Journal of Number Theory 99 (2003), 120-138)において、剰余 Galois 表現 ρ が楕円的 Hecke 固有形式に付随し, “unobstructed” な変形問題の状況で「Gouvea の予想」を証明した際に用いた手法を, ρ が総実代数体 F 上の Hilbert Hecke 固有形式に付随している場合へと拡張するということである. この手法は, Gouvea と Mazur 両氏による共著論文 “On the density of modular representations” (in “Computational perspectives on number theory,” 1998)において非常に特別な仮定の下で提示されたものであり, Coleman 氏による論文 “ p -adic Banach spaces and families of modular forms” (Invent. Math. 127 (1997))で構成された ρ に付随する楕円的 Hecke 固有形式の p -進無限族を用いて, Mazur 氏の論文 “An “infinite fern” in the universal deformation space of Galois representations” (Collect. Math. 62 (1997))において ρ の普遍変形空間 X 内に構成された楕円的 Hecke 固有形式に付随する無限個の点からなる infinite fern と名付けられた部分集合を駆使し, X において楕円的 Hecke 固有形式に付随する点が Zariski 位相の意味で稠密に存在していることを示すというものである. (この稠密性が「Gouvea の予想」の主張にある R と T の同型を引き起こす.)

(2) この手法を, ρ が F 上の Hilbert Hecke 固有形式に付随する場合へ拡張するにあたり, 重要なポイントが二つある.

① 一つ目のポイントは, ρ に付随する F 上の Hilbert Hecke 固有形式からなる Coleman 型の p -進無限族を構成する問題である. (この問題は, 上記 1 (3) で述べたように私自身の論文 “On p -adic families of Hilbert cusp forms of finite slope” (Journal of Number Theory 123 (2007) pp. 363-387) で部分的に解決することができている.)

② ポイントの二つ目として, ρ に付随する F 上の Hilbert Hecke 固有形式からなる p -進無限族を構成できたとして, それを用いて ρ の普遍変形空間 X 内に, 前述した Mazur 型の infinite fern なるものの類似物を構成できるかという問題である.

(3) この二つのポイントが乗り越えられるならば, 楕円的保型形式の場合と同様に, Hilbert 保型形式に対しても newform の理論や一般化された Hodge-Tate weight の理論が用いることができるので, (1) で述べた手法を Hilbert 保型形式の場合に適用することができると思われる.

(4) 一方で, 総実代数体 F を基盤とした議論に固執するのではなく, 有理数体上の保型形式と総実代数体上のそれとの関連を記述する基底変換の理論との兼ね合いや, 普

遍変形空間 X そのものの幾何的な性質の追及なども重要と思われる.

4. 研究成果

上記 3 (4) で述べた普遍変形空間の幾何的性質を掘り下げるうえで重要と思われる一つの問題として, 無限な傾きをもつ楕円的固有形式の p -進解析的な無限族を構成する問題がある. 2009年度の研究成果として, この問題を解決する手立てとして上記 3 (4) との関連で期待されていた, 有理数体から実二次体への基底変換の理論と私自身の論文 “On p -adic families of Hilbert cusp forms of finite slope” (Journal of Number Theory 123 (2007) pp. 363-387) で構成された有限な傾きをもつヒルベルト固有形式の p -進解析的な無限族の構成理論を組み合わせる方法が, p -超尖点的な場合にはうまく機能しないことを昨年度証明できたことに引き続き, Jacquet-Langlands 対応の観点からも構成理論を構築できないことを証明できたことが挙げられる. これらの成果については, ある特別な構成法を否定するという部分的なものであるため, 肯定的な形で結論が得られるまで論文としての出版は見合わせたいと考えている. 一方, 2010年度の研究成果として, p -超特異的な場合に, 無限な傾きをもつ楕円的固有形式の p -進解析的な無限族の構成問題を解決できたことが挙げられる. この成果については, 論文 “On p -adic analytic families of eigenforms of infinite slope obtained by twisting Coleman families in the p -supercuspidal case” として出版準備中である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 3 件)

① 山上敦士

発表標題: On p -adic automorphic forms on definite quaternion algebras

研究集会: 九州代数的整数論 2011

発表年月日: 2011年2月19日、九州大学

② 山上敦士

発表標題: On p -adic families of eigenforms of infinite slope

研究集会: 数論幾何学ワークショップ 2010

発表年月日: 2010年8月6日、沖縄県

③ 山上敦士

発表標題: On p -adic analytic families of eigenforms of infinite slope

研究集会: 第4回福岡数論研究集会

発表年月日: 2009年8月26日、九州大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山上 敦士 (YAMAGAMI ATSUSHI)
京都産業大学・理学部・准教授
研究者番号：00440876

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし