

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 20 日現在

機関番号：82723

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740032

研究課題名（和文）

有限群およびその q -類似上の多変数直交多項式

研究課題名（英文）

Multivariate orthogonal polynomials on finite groups and their q -analogues

研究代表者

水川 裕司 (MIZUKAWA HIROSHI)

防衛大学校・総合教育学群・准教授

研究者番号：60531762

研究成果の概要（和文）：

本研究では有限群上あるいはそれに関連した代数上での特殊関数の考察を行った。その結果、環積のなす(ねじれ)ゲルファントペア (S_{2n}, H_n) の一般化の球関数の完全な記述と、多変数クラウチャック多項式の直交性の必要十分条件、さらに対称群の通常、あるいはモジュラー指標における結果を得た。また、その応用として、有限群の等質空間の確率空間としての取り扱いや、群論の古典的な定理であるフロベニウス・シューアの定理の拡張も与えた。

研究成果の概要（英文）：

In this study, I dealt with the special functions arising from finite groups or their q -analogues. As results, I obtained the complete description of the spherical functions of a certain Gelfand pair which is generalization of the Gelfand pair (S_{2n}, H_n) , a necessary and sufficient condition of orthogonal properties of multivariate Krawtchouk polynomials, and a formulae of the character of the symmetric groups. Furthermore I applied these results on finite homogenous spaces as stochastic spaces and obtained a generalization of classical Frobenius-Schur theorem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	0	1,200,000
2010 年度	1,000,000	0	1,000,000
2011 年度	900,000	0	900,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	0	3,100,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：表現論、代数的組合せ論、球関数、超幾何関数、ヘッケ環

1. 研究開始当初の背景

群論サイドから見た多変数の直交多項式は一変数の理論の完成後、多くの研究者の関心が集まるところである。特に、どのような関数が出てくるのか？また一変数がそうであったようにその上限を与える枠組みがある

のかは重大な問題である。

2. 研究の目的

本研究では主に対称群やその類似の群や代数を用いて多変数関数を見つけること、そこで得られる関数たちの性質を調べること、そ

の枠組みを探ることである。特に代表者の2004年の結果で、複素鏡映群と対称群のなす組はゲルファントペアであり、その球関数は青本・ゲルファントの超幾何関数で記述されることが分かった。従い、群論的にこれの性質を調べ、 q -アナログを与えることができれば、背景で述べた問題に対して重要な進展がみられることになる。また、群のなす等質空間は近年確率空間として面白い対象であるということが認識されてきた。そこで、良い等質空間が現れたら確率空間としての解釈も考えるべきである。本研究もこのことは常に念頭に置いて進める。

3. 研究の方法

環積のなすゲルファントペアの球関数の計算を行い、また過去の結果を参照し、群のゲルファントペア、ヘッケ代数、代数群の球関数を考える。その際に使われる手法は主にリー型の組合せ論における表現論的手法である。さらに有木小池代数など、岩堀ヘッケ代数の拡張として現れる代数たちの表現論は現在の表現論において中心的話題であるが、ここで開発された多くの手法を多変数の直交関数の計算に還元するのは最良の指針に思われる。特殊関数の計算は具体的なものなので、表現を扱う際にその実現が与えられていると大変見通しが良く、これらの代数はこの要請にこたえてくれることが多い。また、エキゾチックなシュバレー群という概念がある。本来複素鏡映群は代数群のワイル群になりえないが、仮想的にそのような群を考えることは可能である。1980年代に古典的なゲルファントペアである超八面体群と対称群のシュバレー群版である直交群、あるいはシンプレクティック群とその放物部分群たちのゲルファントペアがStantonにより計算されたが、このエキゾチック版が代表者の上記の結果によって示唆されているのではないかとこの指導理念のもと研究を進める。

4. 研究成果

(1) ゲルファントペア (S_{2n}, H_n) の一般化である環積のなすゲルファントペアを構成して、それらのねじれ球関数を完全に与えた。さらにこのペアのグロタンディック環から多成分の対称関数環への特性写像を定義し、ねじれ球関数の像を決定した。

具体的にはまず有限群 G を一つ固定する。そして G の直積群 $G \times G$ と対角部分群 ΔG を考

える。これがゲルファントペアなのは有名な事実である。そしてこのペアの n 個の直積 $(G \times G)^n$ と $(\Delta G)^n$ をつくる。すると、まず G の $2n$ 個のコピーには $2n$ 次の対称群 S_{2n} が場所の置換として作用する。また、対角部分群のほうには S_{2n} の部分群である超八面体群 H_n が同様に作用する。

そこで、この作用を用いてそれぞれ半直積群を作ると、このペアはゲルファントペアであることが示される。これを (SG_{2n}, HG_n) と置くことにする。さらに、いま任意の HG_n の一次表現を考え、 SG_{2n} への誘導表現が無重複であることも示される。以上の設定で、両側剰余類の決定と、各一次表現に対するねじれヘッケ環の基底をべき等元の形で構成した。そして、それぞれの誘導表現の既約分解を直接べき等元により構成し、球関数たちも同様にべき等元の計算の繰り返しにより決定した。さらに多成分の対称関数環を用意し、このペアのグロタンディック環からの特性写像を定義し、それが確かに代数の同型を与えることを示した。この状況の下、各ねじれ球関数たちは zonal 多項式とシューアの Q -関数たちの積に移されることを示した。また、特別な状況（たとえば、 G が2次の巡回群の場合）で特別な一次表現を考えると、ねじれ球関数のテーブルは本質的に対称群の指標表で与えられるという事実も得た。

また、これの既約分解において、フロベニウス・シューアの定理の拡張が本質的な役割を果たすが、ここで用いられたものから出発して、さらなる一般化もできた。フロベニウス・シューアの定理はオリジナルの定理が発表された後、川中と松山によってその本質的な拡張が行われた。これは群の位数2の自己同型写像を用いたものであり、特に、リーマン対称空間やその有限類似に対して重要な公式である。また最近では Bump と Ginzburg によって一般の自己同型を用いた公式とその解釈が得られた。私はさらに彼らの公式に一次表現によるひねりを加えた公式を作り、これの表現の重複度による解釈を与えた。

(2) 多変数クラウチャック多項式は近年直交多項式の専門家も含め、その直交性を含めた性質に関していくつかの研究がなされている。ゲルファントペアの理論を用い、これの超幾何表示を与えたのは代表者である。この研究においてさらに直交性に関する必要十分条件を与えた。特別な場合として、2変数のときは、Rahman と Gruenbaum により得られていたが、このことの一般化を与えたということである。彼らは解析的手法を使って示

したが、私はこれを線形代数を使い完全に一般の場合の証明をした。多変数クラウチャック多項式はある行列成分で作られる母関数で定義されるが、私の結果はここで登場する行列の関係式を用いるものである。

この結果は将来 q -多変数クラウチャック多項式を構成するうえで、直接利用可能であると考えている。その後の進展として Rahman と Gruenbaum はあるゲームを解く確率モデルにおいてこの多項式を利用している。また、私も簡単なツボとボールのモデルに対してこれの応用を与えたが、これが Diaconis の目に留まり、彼らの統計理論に応用された。このように多変数クラウチャック多項式は多くの応用を持ち、今後も発展していくものと思われる。

(3) 新たな直交多項式を作るという目的のもと、様々なことを試みた。有限群の時に複素鏡映群と対称群のペアを考え、うまくいったのでその q -アナログであるところの有木小池代数とその部分代数であるところの岩堀ヘッケ代数を取り扱った。そのうち比較的うまくいったものが、有木小池代数の半正規表現を用いるものである。これによって岩堀ヘッケ代数の不変元までは計算できた。しかし、不変元を“関数化”するために表現空間上の計量をうまく導入しなくては行けないが、完成にはいたらなかった。これは有木小池代数のたくさんのパラメーターを制限することでうまくいくと思いき、継続中の研究である。Koelink の 2000 年の結果をみると、我々の場合の特別な場合である B 型のヘッケ環ではうまくそれが導入できているので、この結果を精密に検討することで解決するものと思っている。

また、エキゾチックなシュバレー群の方法を長いこと試したが、うまくいかなかった。その結果代数群の表現の骨組みを与える有木小池代数のほうを先に考えるのが正しく、その後この課題に取り組むのが自然だという認識に至ったわけである。

(4) また、対称群のブラウアー・シューア関数と呼んでいる対称群のモジュラー表現の母関数を定義し、それに関する研究をした。これはモジュラー表群における組合せ論的手法の有用性を考えるうえで試験的なものである。シューア関数の場合に倣って変換行列の性質やコーシー恒等式を与えた。この研

究はまだ萌芽期といえるもので、今後の発展が望まれる。現在は岡山大学のグループがいくつかの進展を得ているようである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

(1)

Hiroshi Mizukawa,
Wreath product generalizations of the triple (S_{2n}, H_n, ϕ) and their spherical functions.
J. Alg. 334 (2011), no.1, pp. 31-53. (査読有)

(2)

Hiroshi Mizukawa,
Twisted Gelfand pair of complex reflection groups and r -congruence properties of Schur functions.
Ann. Comb. 15 (2011), no.1, pp. 119-125. (査読有)

(3)

Hiroshi Mizukawa,
Orthogonality relations for multivariate Krawtchouk polynomials.
SIGMA. 7 (2011), Paper017, 5 pp. (査読有)
<http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2011.017>

(4)

水川裕司,
「フロベニウス＝シューアの定理とその一般化」,
数理解析研究所講究録, 1687 (2010), 167-173. (査読なし)

(5)

水川裕司,
「有限等質空間の調和解析と統計に関する話題」,
数理解析研究所講究録, 1593 (2010), 190-196. (査読なし)

(6)

水川裕司,
「有限群上の調和解析」,
第54回代数学シンポジウム報告集 (2010),
223-244. (査読なし)

[学会発表] (計 6 件)

(1)

水川裕司,
「壺とボールの有限群論的解釈」
科研費研究集会「計算代数学と数理統計学の新たな展開」,
2010年11月15日, ソニックシティ大宮 (埼玉県)

(2)

水川裕司,
「有限群の Gelfand pair の壺とボールのモデルへの応用」
日本数学会秋季総合文科会, 2010年9月24日,
名古屋大学 (愛知県)

(3)

水川裕司,
「フロベニウス=シューアの定理の一般化とその応用」
RIMS 研究集会「代数的組合せ論および関連する群と代数」,
2009年11月20日, 信州大学 (長野県)

(4)

水川裕司,
「有限群の既約指標と共役類に関する公式」
第8回組合せ論サマースクール, 2009年9月1日,
稚内北星学園大学 (北海道)

(5)

水川裕司,
「有限群上の調和解析と統計に関する話題」
RIMS 研究集会「表現論と組合せ論」,
2009年8月28日, 北海道大学 (北海道)

(6)

水川裕司,
「有限群上の調和解析」
第54回 代数学シンポジウム, 2009年8月6日,
明治大学 (東京都)

[図書] (計 1 件)

Mo-Lin Ge 他編
QUANTIZED ALGEBRA AND PHYSICS
Proceeding of the International Workshop,
World Scientific Co Pub, pp. 210 (pp. 1-9
を担当)
<http://www.worldscibooks.com/mathematics/8081.html>

[産業財産権]
○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者
水川 裕司 (MIZUKAWA HIROSHI)
防衛大学校 総合教育学群 准教授
研究者番号: 60531762