

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月25日現在

機関番号：11401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740033

研究課題名（和文） 写像類群の高次マグナス表現の忠実性に関する研究

研究課題名（英文） A Study on the faithfulness of the graded Magnus representation of the mapping class group

研究代表者

鈴木 正明（SUZUKI MASAOKI）

秋田大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：70431616

研究成果の概要（和文）：写像類群の次数付きマグナス表現の忠実性を調べるために、その最初の次数である Torelli 群のマグナス表現について、核に入るいくつかの元を得た。それらの元が次の次数のマグナス表現の核に入るかを考察し、核の元でないという事実が得られた。

研究成果の概要（英文）：In order to consider the faithfulness of the graded Magnus representation of the mapping class group, we obtained some elements which belong to the kernel of the Magnus representation of the Torelli group, which is the first case of the graded Magnus representation of the mapping class group. Further we showed that these elements do not belong to the second Magnus representation of the mapping class group.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：写像類群、線型表現

## 1. 研究開始当初の背景

曲面の写像類群は曲面の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体として定義される。写像類群は曲面のタイヒミュラー空間に作用し、その商空間が古典的に複素解析や代数幾何の研究対象でもあるリーマン面のモジュライ空間である。また、リーマン面のモジュライ空間と曲面バンドルの分類空間はほぼ等しい空間であることが知られていることから、それらの研究にも写像類群は非常に大切な役割を果たしていることがわか

る。さらに、曲面上の曲面バンドルのモノドロミーには曲面の写像類群が現れることから、写像類群は4次元ファイバー空間の理論への応用も考えられる。しかし写像類群の構造の解明については未解決な部分がまだ多い。

写像類群のマグナス表現はこれまで様々な研究がなされてきた。写像類群のマグナス表現は、ひとつ境界をもつ曲面の写像類群からその曲面の基本群整数による群環を係数にもつ次数  $2g$  の一般線型群への写像である。ここで  $g$  は曲面の種数とする。また、写像類

群のマグナス表現を用いて高次マグナス表現が定義される。ここで定義域は写像類群の元で曲面の基本群の降中心列への作用が自明なものの全体で、値域は曲面の基本群をその降中心列で割った商群の群環である。特にその最初の次数のものは **Torelli** 群のマグナス表現と呼ばれる。**Torelli** 群のマグナス表現は忠実でない、すなわち群準同型として単射でないことが知られているが、それ以外の高次のマグナス表現については忠実か否かについては知られていない。

## 2. 研究の目的

写像類群に関する重要な問題のひとつとして、写像類群や **Torelli** 群が線型であるか、すなわち有限次元の忠実な表現を持つかという問題がある。

**Torelli** 群のマグナス表現が忠実かという問題については忠実でないということが示されたが、高次のマグナス表現の忠実性については知られていない。よって高次のマグナス表現の忠実性に関して考察することが本研究の目的である。

また、マグナス表現は **Fox** 微分を用いて定義される。同様にねじれ **Alexander** 多項式も有限表示可能な群に対して、**Fox** 微分を用いて定義される。さらに詳しくは、その群の表現と群の自由アーベル群への全射準同型によって定義される不変量である。この不変量を用いることにより、群の性質を調べることができる。たとえば、群の間に全射準同型が存在すると、それぞれのねじれ **Alexander** 多項式は割り切れるという性質があるので、それを用いて、群の間に全射準同型が存在しないことを証明できる場合がある。この判定方法を用いて結び目群の間に全射準同型が存在するかを決定することもできる。この結果を踏まえ、結び目群の間の全射準同型についても研究を進める。

## 3. 研究の方法

写像類群の高次マグナス表現について、まず考えるべき問題は、**Torelli** 群のマグナス表現の核がどのような構造をもつかということである。例えば、**Torelli** 群の元がその核に入る具体的な必要条件もしくは十分条件や、核は有限生成か否か、等である。同時に像について調べるためにマグナス表現の像によって得られる行列の特性多項式の性質について研究する。また近年研究の進んでいる写像類群の重要な部分群である **Johnson kernel** の  $1$ -コサイクル  $d$  とマグナス表現の関連について考察する。

上記の研究結果を用いて、高次マグナス表現の忠実性について研究を進める。特にこれまでに見つかっている **Torelli** 群のマグナス表現の核の元は全て  $2$  次のマグナス表現の定義域の元である。それらの元の  $2$  次マグナス表現の像を調べることなどによって  $2$  次マグナス表現の忠実性について考察する。さらに同様の考察などにより高次マグナス表現の忠実性など、マグナス表現の性質について考察する。

結び目群の間の全射準同型について研究するため、計算機のプログラムを構築し、それによって数多くの計算を行う。

## 4. 研究成果

2009 年度：**Torelli** 群のマグナス表現の核の性質を研究した。その核の元で森田準同型の核に入らないものを探すために森田準同型を計算する方法を考察する必要がある。一般的な状況を考えると自由群の自己同型群の元がその自由群への作用で与えられるとき、その森田準同型の像を計算したい。その元がジョンソンカーネルに入るかどうかを調べることは計算機を使えばたやすい。ただ、分離的単純閉曲線のデーンツイストの積で表わす表し方は知られていないので、その方法が分かればよいことになる。この問題の手始めとして、二つの単純閉曲線が分離的になる組でのデーンツイストの組の交換子が分離的単純閉曲線のデーンツイストの積で表わす方法を考察した。この問題の特殊な場合についてはランタンリレーションと呼ばれる写像類群の特徴的な関係子を用いて解くことができた。たださらに一般的な状況については分かっていない。この場合については計算した例については全て森田準同型の値はゼロになってしまうことを確かめた。また、同様な元に対して **Torelli** 群のマグナス表現によって得られる行列の特性多項式を求めた。これらは計算した例において全て自明になった。すなわち単位行列の特性多項式と同じになった。これも一般的に計算した以外の例でもそのようになるのかは不明である。これらの計算結果は森田準同型と **Torelli** 群のマグナス表現の関連を調べる上で基礎的なデータとなるため、今後の研究に大いに役立つことが期待される。

2010 年度：写像類群の高次マグナス表現の計算を行い、その性質を研究した。特に  $2$  次のマグナス表現と  $3$  次のマグナス表現についての計算例を多く調べた。 $2$  次のマグナス表現はトレリ群のマグナス表現であり、既に忠実性については解決しているが、森田準同型との関係など多くの問題が残っている。森田準同型は、定義は非常に簡単なものであるが、

性質がよく知られていない上に、ジョンソンカーネルと呼ばれる近年多くの研究者が研究している対象との関連から、特に重要性が高いと思われる。森田準同型とトレリ群のマグナス表現の関係を調べるために、計算機により多くの計算を行った。知られている結果として、2つの分離的単純閉曲線でのデーンツイストの交換子では森田準同型の値がゼロになることが知られている。よって、この形をしていないトレリ群のマグナス表現の核の元を見つけることは大きな問題である。また、3次のマグナス表現として、ジョンソンカーネルの元からのマグナス表現の計算も多く行った。これは計算機上のプログラムを構築し、それによる計算を行った。この計算により、トレリ群のマグナス表現の核の2つの元を考え、それらの交換子で3次マグナス表現の核に入るかを計算したが、計算した例では核に入る元は見つからなかった。これにより、トレリ群のマグナス表現の核の交換子が3次マグナス表現の核には入らないことが分かった。これらの計算も森田準同型とマグナス表現との関係を調べる上での基礎的なデータとなり、今後の研究に大いに役立つことが期待される。

2011年度：自由結合代数の微分のなすリー代数のアーベル化について考察を行った。有理数上のベクトル空間で anti-symmetry と Jacobi identity を満たす有理数上の双線型写像を持つものをリー代数と呼び、このとき、その双線型写像をブラケット写像と呼ぶ。また、リー代数に対して、そのブラケット写像の像で割ったものをリー代数のアーベル化と呼ぶ。さらにリー代数が次数付けされ、その次数付けがブラケット写像で閉じているとき、リー代数のアーベル化は直和分解することができる。その各次数を weight と呼ぶことにする。

ここでは、2個以上の基底を持つ有理数上のベクトル空間を考え、それによって生成される定数部分のないテンソル空間を考える。このテンソル空間上の自身への線型写像で（ライプニッツルールのような）ある条件を満たすものを微分と呼ぶ。この微分の集合は自然に次数付きリー代数の構造を持つ。ブラケット写像は次数1の部分への作用によって特徴づけられる。このとき、正次数の微分全体のアーベル化の次数2の部分は元のベクトル空間の2階テンソルと同型であることを示した。これは基底の個数が少ないときに森田茂之氏によって示されていたものであるが、一般の基底の個数で成立することを証明した。また、次数が3以上のときは次数よりも基底の個数が多いとき、すなわち安定的には正次数の微分全体のアーベル化は消えることを証明した。これにより正次数の微分全体はリー代数として安定的には有限生

成であることが示されたことになる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Masaki Suzuki, An epimorphism between knot groups which does not map a meridian to a meridian, 数理解析研究所講究録 1747 Twisted topological invariants and topology of low-dimensional manifolds, 135-139, 査読無
- ② Keiichi Horie, Teruaki Kitano, Mineko Matsumoto and Masaaki Suzuki, A partial order on the set of prim knots with up to 11 crossings, Journal of Knot Theory and its Ramifications, Volume 20, 275-303, 査読有
- ③ Takayuki Morifuji and Masaaki Suzuki, Representations of the braid group and punctured torus bundles, Kyungpook Mathematical Journal, Volume 49, 7-14, 査読有

[学会発表] (計11件)

- ① Masaaki Suzuki, Epimorphism between knot groups and the images of meridians, Circle valued Morse theory and Alexander invariants, 2011年11月17日、東京大学
- ② 鈴木正明、メリディアンを保たない結び目群間の全射について、トポロジーとコンピュータ 2011、2011年11月12日、名城大学
- ③ Masaaki Suzuki, Epimorphism between knot groups and the images of meridians, Topology Seminar, 2011年10月12日、北京大学
- ④ 森田茂之、逆井卓也、鈴木正明、自由結合代数の微分のなすリー代数のアーベル化、リーマン面に関連する位相幾何学、2011年9月3日、東京大学
- ⑤ Masaaki Suzuki, Epimorphisms between knot groups: determination of the partial order, Twisted topological invariants and topology of low dimensional manifolds, 2010年9月14日、あきた白神体験センター
- ⑥ Masaaki Suzuki, On the graded Magnus representation of the mapping class group, Topology and Computer 2010, 2010年9月10日、東京工業大学
- ⑦ Masaaki Suzuki, Epimorphisms between knot groups, Claremont Topology Seminar, 2010年3月2日、ピ

ッツァー大学

- ⑧ Masaaki Suzuki, Epimorphisms between knot groups, CalTech Geometry and Topology Seminar, 2009年12月11日、カリフォルニア工科大学
- ⑨ Masaaki Suzuki, Epimorphisms between knot groups, Geometry and Topology Seminar, 2009年10月12日、南カリフォルニア大学
- ⑩ Masaaki Suzuki, Epimorphisms between knot groups of 2-bridge knots with up to 12 crossings, Topology and Computer 2009, 2009年9月1日、東京工業大学
- ⑪ Masaaki Suzuki, A partial order on the set of prime knots with up to 11 crossings, Topology Seminar, 2009年6月10日、トゥールーズ大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

鈴木 正明 (SUZUKI MASAOKI)  
秋田大学・教育文化学部・准教授  
研究者番号：70431616

### (2) 研究分担者 なし

### (3) 連携研究者 なし