

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月10日現在

機関番号：12102
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2011
課題番号：21740035
研究課題名（和文） ハンドル体結び目とトポロジー

研究課題名（英文） Handlebody-knots and topology

研究代表者
石井 敦（ISHII ATSUSHI）
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：00531451

研究成果の概要（和文）：

ハンドル体結び目とは、3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことです。二つのハンドル体結び目は3次元球面のイソトピーで移りあうときに同値であると定義します。ハンドル体結び目は結び目の自然な一般化であり、空間グラフや3次元多様体と関係が深い研究対象です。研究成果は次にあげる通りです。補正山田多項式を定義しました。カンドル彩色不変量を用いてハンドル体結び目の既約性を判定する方法を開発しました。空間3価グラフ全体に対してIH複体の構造を与え、IH距離を不変量を用いて評価しました。

研究成果の概要（英文）：

A handlebody-knot is a handlebody embedded in the 3-sphere. Two handlebody-knots are equivalent if one can be transformed into the other by an isotopy of the 3-sphere. A handlebody-knot is a natural generalization of a knot, and is closely related to a spatial graph and a 3-manifold. The results of this study are as follows: I defined a normalized Yamada polynomial. I provided methods to detect the irreducibility of a handlebody-knot by using quandle coloring invariants. I introduced the IH-complex on the set of spatial trivalent graphs, and evaluated the IH-distance by using invariants.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何学、結び目理論

1. 研究開始当初の背景

ハンドル体結び目とは、3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことです。二つのハンドル体結び目は3次元球面のイソトピーで移りあうとき、つまり連続的に一方を他方に變形できるとき、同値であると定義します。結び目（円周の埋め込み）は、正則近傍をとることで、種数1のハンドル体結び目に対応します。したがって、ハンドル体結び目理論は、種数に関する結び目理論の自然な一般化になっています。

ハンドル体結び目は通常の結び目の自然な一般化である一方、空間グラフの正則近傍としての顔も持ちます。また、ハンドル体は3次元多様体論の基本的な対象です。これらのことより、ハンドル体結び目は他の研究対象との関係が期待されていました。

研究開始当初のハンドル体結び目理論の研究状況は、ようやく基本変形が与えられたところでした。つまり、ハンドル体結び目理論の創生期であり、したがってハンドル体結び目を扱うための道具は十分に揃っていませんでした。

そして、そのように十分に道具が揃っていない中、6交点までのダイアグラムを持つハンドル体結び目の表が作成されているところでした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、大きく分けると次にあげる三つになります。

- (1) 研究開始当初に、作成中であったハンドル体結び目の表には、区別できていないハンドル体結び目の組がいくつかありました。これらの組を区別する方法を開発することが、本研究の一つの目的でした。
- (2) ハンドル体結び目理論は結び目理論の一般化であるというだけではなく、他の様々な対象と関連があることが期待されていました。ハンドル体結び目とそれらの対象との関係を明らかにすることが、本研究の一つの目的でした。
- (3) 前項で述べたようにハンドル体結び目の研究は他の研究対象と関連が期待されていました。したがって、研究会などを開催し、他の研究者との連携を密にして、他の研究との関連の中でハンドル体結び目理論を発展させていくことが、本研究の一つの目的でした。

3. 研究の方法

- (1) 結び目に対して定義されている量子不変量やカンドルコサイクル不変量などの結び目の判別能力の高い不変量の構成を、ハンドル体結び目に対して見直すことでハンドル体結び目の表の区別できていない組を区別する方法の開発を目指しました。
- (2) ハンドル体結び目を3次元多様体論の観点から見ることで、ハンドル体結び目のスパインに惑わされない、ハンドル体結び目それ自体の性質を扱い、その応用を得ることを目指しました。
- (3) 任意のハンドル体結び目は空間3価グラフの正則近傍として得られることに着目し、ハンドル体結び目の観点から空間グラフ全体の構造を明らかにすることを目指しました。

4. 研究成果

- (1) 円周2重被覆を持つ3価グラフの空間埋め込みに対して、補正山田多項式を定義しました。

ハンドル体結び目は、空間3価グラフのIH変形による同値類であることが分かっていますが、さらに、橋を持たない3価グラフの空間埋め込みのIH変形による同値類であることも分かっています。

橋を持たない3価グラフは円周2重被覆を持つことが予想されているので、円周2重被覆を持つ3価グラフの空間埋め込みの不変量であって、IH変形で不変であるものは、円周2重被覆の予想のもとで、ハンドル体結び目の不変量になります。

空間グラフの不変量である山田多項式は基本変形に対して完全には不変でなく、単元分のずれがあります。ハンドル体結び目の不変量を定義する上ではこのずれが障害になります。

研究成果は、ハンドル体結び目の不変量を定義するために山田多項式に適切な補正を与えたこと、特に、次を示したことです。

① 円周 2 重被覆に付随するすべての円周のねじれ数を足し合わせたものを、単元の指数に入れて、山田多項式に掛け合わせることで補正山田多項式が定義できる。特に、補正山田多項式はすべての基本変形に対して完全に不変である。

(2) カンドル彩色不変量を用いてハンドル体結び目の既約性を判定する方法を開発しました。

3次元球面に埋め込まれたハンドル体結び目のハンドル体と本質的円板で交わる球面が存在するとき、ハンドル体結び目は可約であるといえます。ハンドル体結び目は可約でないときに既約であるといえます。

ハンドル体結び目が可約であることは実際に分解球面を見つけることで示すことができますが、ハンドル体結び目が既約であることは分解球面の存在を仮定して矛盾を導く必要があります。

一方、カンドル彩色不変量は、カンドルとよばれる代数によるダイアグラムの彩色数のことです。カンドルは結び目の基本変形に動機づけられた公理によって定義されますが、これを修正することで、ハンドル体結び目に対してもカンドル彩色不変量を定義することができます。

研究成果は、ハンドル体結び目の表を作成するときにも重要である既約性というハンドル体結び目の性質をカンドル彩色不変量を用いて捉えるのに成功したこと、特に、次を示したことです。

① トンネル数 1 の可約なハンドル体結び目のカンドル彩色数の各多重度は、彩色に用いるカンドルのタイプによって割り切れる。

② 種数 1 のハンドル体結び目との円板和によって得られる可約なハンドル体結び目は非自明なカンドル彩色を持つ。

(3) 空間 3 価グラフ全体に対して IH 複体の構造を与え、空間グラフの間の IH 距離を不変量を用いて評価しました。

ハンドル体結び目と空間グラフをつなぐキーワードは近傍同値です。空間グラフを近傍同値で考えたものがハンド

ル体結び目になります。

IH 複体において IH 変形で移りあう空間グラフは 1 単体でつながるので、IH 複体の連結成分の一つ一つがハンドル体結び目に対応します。

空間グラフが“自明である”または“最も簡単である”ことを定義することは空間グラフ理論において基本的な問題の一つです。空間グラフが自明なハンドル体結び目を表すことは、空間グラフが“自明である”または“最も簡単である”ための必要条件の一つになります。

よって、自明ハンドル体結び目に対応する空間グラフの属する IH 複体の連結成分の形を知ることが空間グラフの自明性を定義する上で重要になります。

研究成果は、IH 複体の形を知るために、ハンドル体結び目の不変量を用いて IH 距離を評価する方法を開発したこと、特に、次を示したことです。

① 二つの空間 3 価グラフの間の IH 距離は、フィボナッチ数によって上からおさえられる任意の関数を用いて、ある不変量の値が一致するフロー付空間 3 価グラフの関数の差の最小値を用いて下から評価できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Atsushi Ishii, On normalizations of a regular isotopy invariant for spatial graphs, Internat. J. Math. 査読有 22 (2011) 1545--1559.

DOI:10.1142/S0129167X1100729X

② Atsushi Ishii, Kengo Kishimoto, The quandle coloring invariant of a reducible handlebody-knot, Tsukuba J. Math. 査読有 35 (2011) 131--141.

③ Atsushi Ishii, Kengo Kishimoto, The IH-complex of spatial trivalent graphs, Tokyo J. Math. 査読有 33 (2010) 523--535.

DOI:10.3836/tjm/1296483486

- ④ Atsushi Ishii, The leading finite type coefficients of the Links-Gould polynomial of a link, Kyungpook Math. J. 査読有 50 (2010) 49--58.
- ⑤ Atsushi Ishii, Naoko Kamada, Seiichi Kamada, The Miyazawa polynomial for long virtual knots, Topology Appl. 査読有 157 (2010) 290--297. DOI:10.1016/j.topol.2009.04.058

〔学会発表〕(計 13 件)

- ① Atsushi Ishii, Quantum-commutative quantum-symmetric algebras and invariants for handlebody-links, 日本数学会年会, 東京理科大学, 2012.3.26
- ② Atsushi Ishii, An introduction to handlebody-knot theory, Colloquium, The University of South Florida, The United States of America, 2012.2.13
- ③ Atsushi Ishii, Invariants for handlebody-knots derived from Yetter--Drinfeld modules, The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon, Korea, 2012.1.11
- ④ Atsushi Ishii, A handlebody-knot and a Yetter--Drinfeld module, 結び目の量子不変量とそのカテゴリー化, 早稲田大学, 2011.8.26
- ⑤ Atsushi Ishii, A quandle cocycle invariant with non-commutative flows for a handlebody-knot, Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学, 2011.5.27
- ⑥ Atsushi Ishii, Quandle colorings with non-commutative flows, トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 2011.5.17
- ⑦ Atsushi Ishii, 非可換フローを用いたハンドル体結び目のカンドルコサイクル不変量, Knotting Nagoya, 名古屋市立大学, 2011.2.19
- ⑧ Atsushi Ishii, Yeonhee Jang, Kanako Oshiro, A quandle cocycle invariant on a group representation for

handlebody-links I, II, The Seventh East Asian School of Knots and Related Topics, 広島大学, 2011.1.10

- ⑨ Atsushi Ishii, A knotted handlebody and a spatial graph, International Workshop on Spatial Graphs 2010, 早稲田大学, 2010.8.19
- ⑩ Atsushi Ishii, ハンドル体絡み目の有限型不変量, ハンドル体結び目とその周辺 III, 東京女子大学, 2010.5.15
- ⑪ Atsushi Ishii, Invariants for knotted handlebodies, 量子群と量子トポロジー, 京都大学, 2010.4.20
- ⑫ Atsushi Ishii, On normalizations of a regular isotopy invariant for spatial graphs, 日本数学会年会, 慶應義塾大学, 2010.3.26
- ⑬ Atsushi Ishii, Normalizations for the Yamada polynomial, The Sixth East Asian School of Knots and Related Topics, Nankai University, Tianjin, China, 2010.1.26

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 敦 (ISHII ATSUSHI)
筑波大学・数理物質系・助教
研究者番号：00531451