様式C-19

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　３日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2012
課題番号：２１７４００３６
研究課題名（和文）　曲率が上に有界な空間の幾何学的トポロジー

研究課題名（英文）　Geometric topology of spaces with curvature bounded above

研究代表者
永野　幸一　（NAGANO KOICHI）
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号：３０３３３７７７

研究成果の概要（和文）：CAT(k)空間に代表される曲率が上に有界な距離空間に対して，計量的幾何学と幾何学的トポロジーの融合を目指した．主に，Lytchak 氏との共同研究として，CAT(k)空間に対する壁型特異性の研究，CAT(k)空間内の最も特異性の弱い非多様体点に対する多面体位相正則性の研究，CAT(0)空間に対する漸近的位相正則性の研究について取り組み，汎用性の高い成果を得た．

研究成果の概要（英文）：For spaces with curvature bounded above, especially CAT(k) spaces, I have aimed to unite the metric geometry with the geometric topology. As joint works with Lytchak, I have mainly tried to study the wall type singularity of CAT(k) spaces, the polyhedral local topological regularity of CAT(k) spaces, and the asymptotic topological regularity of CAT(0) spaces, and obtain several versatile results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
２０１２年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：微分幾何，リーマン幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：幾何学，CAT(0)空間，アダマール空間，アレキサンドルフ空間，CAT(1)空間

１．研究開始当初の背景

Alexandrov を祖とする曲率が上に有界な距離空間の理論は，Gromov の提唱した幾何学的群論の基礎にもなっており，多方面からその価値が再認識されている．特に，大域的に曲率が k 以下の空間は,CAT(k)空間と呼ばれ，本質的な研究対象である．完備 Riemann 多様体が CAT(k)であるための必要十分条件は，断面曲率が一様に k 以下かつ単射半径が定曲率 k の空間形の直径以上であることである．

一般には CAT(k)空間の幾何構造は複雑で野性的である．例えば，Kleiner (Math. Z., 1999) により局所コンパクトで測地的完備な2次元CAT(k)空間でも多面体構造を許容するとは限らないことが指摘され，研究代表者 (J. Math. Soc. Japan, 1999) によりその具体例が構成された．一方で，任意の有限単体複体の幾何学的実現はCAT(1)距離を許容する．また，任意のCAT(k)空間は局所可縮でありANR（絶対近傍レトラクト）である．幾何トポロジーの観点から CAT(k)空間を研究することは自然である．

研究開始当初は，研究代表者とLytchak氏（現ケルン大学）による一連の共同研究によって，関連する以下の性質が証明されていた．

(1)　CAT(k)空間の特異点集合の求積可能性．

局所コンパクトで測地的完備な n 次元CAT(k)空間において，非多様体点全体からなる位相特異点集合は，(n-1)次元 Hausdorff 測度に関して可算求積可能であり，特にその Hausdorff 次元はn-1以下である．

(2)　CAT(k)空間の局所位相正則性．

未解決であった Alexandrov の問題は，肯定的である．即ち，局所コンパクトで測地的完備なCAT(k)空間Xがn次元位相多様体であることと，Xの任意の点における方向空間（Xが多面体であればリンクに相等，Riemann 多様体であれば単位接球面に相等）が(n-1)次元球面とホモトピー同値であることは，必要十分である

(3)　CAT(1)空間に対する球面定理．

コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(1)空間は，互いに距離がπ以上である3点の組を許容しなければ，n次元球面と同相である

２．研究の目的

本研究は，CAT(k)空間の計量的な幾何学と，幾何学的トポロジーの多様体分解理論やホモトピー制御理論との融合を目指した．以下では，研究開始当初の本研究の主な目標を具体的に3つ列挙する．

(1)　CAT(k)空間の多面体位相正則性．

次は多面体構造の計量的特徴付けである．

予想．n を 2 以上の自然数とし，T を 3 個の点からなる離散距離空間とする．局所コンパクトで測地的完備なn次元CAT(k)空間X内の任意の非多様体点xに対して，xにおける方向空間が(n-2)次元単位球面と T との球面的結とGromov-Hausdorff距離で十分近ければ，Xはn次元多面体構造を許容するであろう．

この予想は，最も特異性が弱い非多様体点に対する位相正則性であり，前述の局所位相正則性の発展版と看做せる．仮に，X が適当なn次元多面体であれば，n次元面が3つ隣接するような余次元1の面の内点では，方向空間が(n-2)次元単位球面と T との球面的結となる．

(2)　CAT(k)空間の無限小位相正則性．

局所位相正則性の無限小版として，次が成立することが期待できる．

予想．局所コンパクトで測地的完備なCAT(k)空間内の点xがn次元多様体点であることと，x における方向空間が(n-1)次元球面とホモトピー同値であることは，必要十分であろう．

この予想がnが2に等しいとき正しいことは，研究代表者 (Pacific J. Math., 2002) により示されている．

(3)　CAT(0)位相多様体の端の研究．

次はGromov(1981)による予想に基づく．

予想．4次元位相多様体は，CAT(0)であれば，4次元Euclid空間と同相であろう．

この問題には，P. Thurston(J. Geom. Anal., 1996) により，ある位相的な仮定の下で部分的解答が得られている．一方で，Davis-Januszkiewicz (J. Differential Geom., 1991) により，5以上のすべての自然数に対して，n次元Euclid空間と同相でないn次元CAT(0)位相多様体が構成されている．

３．研究の方法

(1)　CAT(k)空間の多面体位相正則性．

2以上の自然数 n に対し，局所コンパクトで測地的完備なn次元CAT(k)空間X内の点 x が壁点であるとは，x における方向空間が(n-2)次元標準単位球面と 3 個以上の点からなる離散距離空間との球面的結に等長的であるときにいう．

多面体位相正則性を示すために，まず，壁型特異性として，壁点の近傍を研究する．具体的には，任意の壁点に対して，任意に近いある点は，(n-1)次元円板と樹木の直積空間に同相な近傍を持つことが予想される．その証明中で培った技法を目標である多面体位相正則性の証明に応用する．

(2)　CAT(k)空間の無限小位相正則性．

目標に迫るため，多面体位相正則性を発展させる形で，特異性の弱い非多様体点の研究を行う．

まず，壁点より少し特異性の強い非多様体点を考える．2 以上の自然数 n に対し，局所コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(k)空間 X 内の非多様体点 x に対して，x における方向空間が(n-2)次元標準単位球面と 3 個以上の点からなる離散距離空間 T との球面的結に Gromov-Hausdorff 距離で十分近いと仮定する．このとき，x の十分小の近傍は高々有限個の n 次元円板の和集合として表されることが期待できる．なお，T が 3 個の離散距離空間である場合は，本研究の目標の１つである多面体位相正則性である．

この予想を肯定的に解決した後，既知である CAT(k)空間の特異点集合の求積可能性の研究と組み合わせることによって，解決の糸口を探ることにする．

(3) CAT(0)位相多様体の端の研究．

一般に，任意の CAT(0)空間は可縮である．様々な研究者の貢献により，可縮な n 次元位相多様体が n 次元 Euclid 空間と同相であるための必要十分条件は，その多様体が無限遠単連結であることである．したがって，4 次元 CAT(0)位相多様体に対して，無限遠単連結性を調べれば良い．

P. Thurston(J. Geom. Anal., 1996)による部分的解答は，幾何学的トポロジーの技法のみにより得られているが，無限遠単連結性を経由していない．本研究では，CAT(0)空間の計量的な幾何学を用いて，無限遠単連結性について考察する．

４．研究成果

Lytchak 氏 (現ケルン大学) との曲率が上に有界な距離空間に対する求積可能性，局所位相正則性， CAT(1)空間に対する球面定理などの一連の共同研究を研究論文の完成に向けて推進した．

本研究で新たに得られた成果は，以下に述べる通りである．いずれの成果も Lytchak 氏との共同研究である．

(1) CAT(k)空間の微分構造の存在性．

CAT(k)空間の局所構造の計量的な研究の過程で，弱い意味での微分構造の存在性に関する次の定理を得た．

定理．局所コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(k)空間 X には，n 次元 Hausdorff 測度に関して全測度である，n 次元計量的正則集合上に DC 微分構造と，その構造に付随した有界変動な Riemann 計量が存在する．

(2) CAT(k)空間に対する壁型特異性．

まず，壁型特異性として，次を示した．

定理．n を 2 以上の自然数とし，X を局所コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(k)空間とする．このとき，任意の壁点に対し，任意に近いある点は，(n-1)次元円板と樹木の直積空間に同相な近傍を持つ．

さらに，応用として，壁点の存在性に関する次の特徴付けを証明した．

定理．n を 2 以上の自然数とし，X を局所コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(k)空間とする．このとき，X が壁点を許容しないことと，X の位相的特異点集合や計量的特異点集合の被覆次元や Hausdorff 次元が n-2 以下であることは，必要十分である．さらに，これらのことが成り立つための必要十分条件は，どの点の方向空間も壁点を許容しないことである．

(3) CAT(k)空間に対する多面体位相正則性．

多面体位相正則性定理として，最も特異性の弱い非多様体点に対する次の定理を得た．

定理．n を 2 以上の自然数とし，T を 3 個の点からなる離散距離空間とする．局所コンパクトで測地的完備な n 次元 CAT(k)空間 X 内の任意の非多様体点 x に対して，x における方向空間が(n-2)次元標準単位球面と T との球面的結に Gromov-Hausdorff 距離で十分近いと仮定する．このとき，x は(n-1)次元円板と T を端点にもつ樹木との直積空間に双 Lipschitz 同相な近傍を持つ．特に，X は n 次元多面体構造を許容する．

この定理において，T が 3 個以上の点からなる離散距離空間であれば，x の十分小の近傍は高々有限個の n 次元円板の和集合である．さらに，互いに異なるそれらの n 次元円板を任意に 2 つ選べば，その和集合は(n-1)次元円板と 3 個の離散距離空間を端点にもつ樹木との直積空間に双 Lipschitz 同相である．これらの新しい知見が，無限小位相正則性の問題の解決の糸口となることが期待される．

(4) CAT(0)空間に対する漸近的位相正則性．

CAT(0)位相多様体に対する端の研究の 1 つとして，CAT(0)空間がいつ Euclid 空間と同相になるかに関して，次のように理想境界を用いて計量的に記述した．

定理．測地的完備な n 次元 CAT(0)空間 X の Tits 理想境界が(n-1)次元標準単位球面に Gromov-Hausdorff 距離で十分近ければ，X は n 次元 Euclid 空間と双 Lipschitz 同相である．特に，X は無限遠単連結である．

なお，この定理は，X に位相多様体であることや，局所コンパクトであることを仮定しないで，成立することに注意する．また，Tits 理想境界がコンパクトであることも仮定せずに成り立つ．

以上(1)-(4)で述べた Lytchak 氏との共同研究の成果は，現在執筆中の一連の研究論文で述べる予定である．Lytchak 氏との一連の共同研究は，いずれも CAT(k)空間に代表される曲率が上に有界な距離空間の計量構造や位相構造に関する汎用性の高い結果である．曲率が上に有界な空間の計量的な幾何学と幾何学的トポロジーの融合として，今後の発展が期待される．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計６件）

①　永野　幸一，
CAT(0)空間に対する漸近的位相正則性，
筑波大学微分幾何学火曜セミナー，
2012 年 12 月 4 日，筑波大学

②　永野　幸一，
Wall type singularity of spaces with an upper curvature bound,
研究集会「リーマン幾何学と幾何解析」，
2011 年 2 月 19 日，筑波大学

③　永野　幸一，
Wall type singularity of spaces with an upper curvature bound
The 2010 General Topology Symposium
2010 年 12 月 21 日，筑波大学

④　永野　幸一，
曲率が上に有界な空間の壁型特異性．
筑波大学微分幾何学火曜セミナー，
2010 年 11 月 9 日，筑波大学

⑤　Koichi Nagano,
Wall type singularity of spaces with an upper curvature bound
The 6th Geometry Conference for Friendship of China and Japan (招待講演),
2010年9月5日，西北大学（西安，中国）

⑥　永野　幸一，
Geodesically complete spaces with an upper curvature bound,
名古屋大学　学生プロジェクト　幾何学セミナー，
2010 年 1 月 20 日-22 日，名古屋大学

〔図書〕（計１件）
①　永野　幸一，
曲率が上に有界なホモロジー多様体，
大学院 GP 数学レクチャーノートシリーズ，
14，東北大学大学院理学研究科，2010 年

６．研究組織
(1)研究代表者
永野　幸一　（NAGANO　KOICHI）
筑波大学・数理物質系・講師
研究者番号：３０３３３７７７