

機関番号：12601

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2009～2010

課題番号：21740040

研究課題名 (和文) 組み合わせ位相幾何学

研究課題名 (英文) Combinatorics in Topology

研究代表者

シャクルトン ケネス (SHACKLETON Kenneth)

東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任研究員

研究者番号：70536870

研究成果の概要 (和文)：この研究は主としてpants・グラフの幾何学に関するものです。

穴が5個のpants・グラフの場合にはどんな理想的2点も無限測地線で結ばれていて、十分高い相互作用ではすべての擬アノソフ投影は測地線軸を持ち、局面グラフの階層的軌跡の系はしばしばpants・グラフの最小化測地線を与える、ことを我々はこの研究で示しました。これはWeil-Petersson計量に相当します。この結果は論文誌の査読を終え、掲載が受理されました。

研究成果の概要 (英文)：Our research has focused primarily on the geometry of the pants graph. The vertices and edges of the pants graph derive from elementary objects and intersection relations on a surface. When we assign length one to each edge, we have a metric space. The most startling property of this space is a theorem of Brock's that it "coarsely" models the Weil-Petersson (WP) metric on Teichmueller space. That is, in sacrificing much of the original structure of the WP-metric we can naturally arrive at the pants graph. The overriding question then becomes: To what extent does the pants graph model the WP-metric? For example, which geometric properties of WP have full geometric analogues in the pants graph?

This is widely considered a pertinent and challenging problem for which we have been able to make the most meaningful progress: When the surface is the 5-holed sphere, we have shown that any two distinct ideal points are connected by a bi-infinite geodesic, that every pseudo-Anosov mapping class (when raised to a sufficiently high power) has a geodesic axis, and that hierarchy path systems in the curve graph often describe shortest paths in the pants graph. These are WP-geometric analogues. This work has just been accepted for publication after peer-review with no corrections necessary.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何

## 1. 研究開始当初の背景

今回の私の研究はパンツ・グラフの幾何学を主な対象としている。パンツ・グラフの辺と頂点は曲面上の基本的対象と交点関係式から導かれる。さらに各辺に長さを与えると距離空間になることがわかる。この空間の最も驚くべき性質は Brock の定理で、Teichmueller 空間の Weil-Petersson (WP) 計量の”粗い”モデルを与えると主張している。

つまり、WP 計量に元々ある構造を幾分か犠牲にすれば、自然にパンツ・グラフに至ることを意味している。

すると次のようなことが問題となってくる：パンツ・グラフはどの程度 WP 計量のモデルを与えているのか？

例えば、WP のどのような幾何学的性質がパンツ・グラフで完全にとらえられるのだろうか？

## 2. 研究の目的

(1)本研究の主たる目的は、先に Jeff Brock 氏の主導で進められた Teichmueller 空間における Weil-Petersson 計量と Hatcher-Thurston のパンツ・グラフ間の幾何学的類推を発展させることである。我々の最終的な目標は、申請書にある(0)-(2)の予測を証明することにできるためだが、各々(1)

「Pants グラフは有限測地的である」と同値である。これは非常に野心的な目標であり、同時にそれまでに大変興味深い中間的なステップと見られる。それにかかわる明確な問題がある。例えばパンツ・グラフの測地線を誘導する Harvey 曲線グラフの任意の長さの階層構造が明らかになっていないことは驚くべきことである。この関連は依然としてまったく解明されていないため、我々は研究を

続けている。さらに、この問題の困難さがこのように明らかであるため、5個の穴がある球や2個の穴があるトーラスのパンツ・グラフの測地線の完全な理解でさえ画期的なことである。

(2) 今年度の本研究における第二の目標は、作間教授との共同研究によって、垣水の複体の幾何とトポロジーについて研究することである。我々はこの複体の直径の増大に関する最適な推定値、および垣水の複体はすべての結び目に対して可縮であるという垣水氏の長年の予測の完全な解答を追求する。具体的な問題はいくつもある。新しく興味深い無限個の結び目のクラスに対して垣水予測を証明するだけでも十分満足できるものだ。(研究代表者は密接に関連した多くの分野に興味を持ち続けている。)

## 3. 研究の方法

(1) Hatcher-Thurston のパンツ・グラフを研究するための主な戦略は、Masur-Minsky に従ってサブサーフェス射影を分析することであった。これらは Lipschitz 氏による低次元のパンツ・グラフへの一対多写像であり、目的はこれらを距離非増写像に発展させることであった。この考え方に基づいて、研究計画の一部として成功していた。二つ目の有望な戦略は、Masur-Minsky の階層構造が常にパンツ・グラフに測地線を誘導するかどうかを決めることで、我々の考えはそれに向かっている。そうであれば我々の研究を完成させるために十分である。先日の研究代表者のシカゴ出張の後、我々共同研究者はマーキングと Teichmueller 空間についての Choi-Rafi の考えを研究することとなった。申請書の提出以降、すでに我々は著しい進歩を遂げ、よって我々ははっきりとこの線上で引き続き

研究を深めていくつもりである。このプロジェクトの一部は Aramayona 博士、Lecuire 博士、そして Parlier 博士との共同研究となるであろう。Aramayona 博士は7月に研究代表者と共同研究を行うために IPMU を訪れることを確約していたが、残念ながら Aramayona 博士の都合が悪いため、IPMU に訪問することができなくなっていた。また計画の初期の段階であるが、研究代表者は共同研究のために8月に西欧へ、また Nevanlinna 会議に出席するため9月に京都大学の数理解析研究所に出張を行う。我々は今年度中にパンツ・グラフの理解について、十分な進展があることを現時点で既に予想している。我々の研究を結び目理論など関連する分野に応用することについては、会議での質疑応答や研究目的の他機関訪問で精査されるであろう。

(2) 研究代表者はこれらの問題に共同で取り組むためにこの夏、広島大学の作間教授を訪ねる計画を立てている。そこで寺垣内 (Teragaito) のアイディア、つまり次の提案について議論する予定である。それは距離についての垣水の特徴付けを注意深く研究することにより、我々の求めている直径に対する制限の改良、および直径とほかの重要な結び目不変量との関連を導くことが可能となるというものである。これらもまた非常に野心的な研究目標であり、我々の研究初期の進展具合によって、このプロジェクトが今年度の終わり、あるいは次年度に研究の中心を担うことになるであろう。(研究代表者は研究提案の範囲内に含まれる、関わりの深いテーマについて興味と戦略を持ち続けている。)

#### 4. 研究成果

パンツ・グラフの研究において目覚ましい進

展があった。パンツ・グラフは Weil-Petersson metric (W-P) 研究の幾何学に関して正確なモデルがあると提示された Brock の定理に触発され、我々がパンツ・グラフは W-P 幾何学に応じて有限的に測地線を作るアルゴリズムの存在を最後に証明できることようになった。我々の新しい方法はパンツ・グラフに特別に依存していないため、Harvey のカーブ・グラフとアーク・グラフ等における応用があるはずである。つまり、特に、交差数最小化測地線を初めに作ることができる。その一方で、この発見にもかかわらず、質問の挑戦的な性質を示して我々の三等価主体予想は全般的に未解決のままである。

さらに、5個穴のあいたパンツ・グラフの大規模幾何学に関する研究がうまく進んでいる。擬アンソヴの十分高い力の作用を見つ、境界がグロモヴの意味で目に見えること、Harvey のカーブ・コンプレックス測地線の関係を示すこと等の証明を教える論文を、ある主要な数学雑誌に既に提出した。Harvey のカーブ・コンプレックス幾何学的距離を分析する二つの論文が出版を承認された。最後に、垣水の結び目に関連付けられているグラフの共同研究については、これが我々はなるべく早めに報告するつもりである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Kenneth J. Shackleton “Geodesic axes in the pants complex of the five-holed sphere”、Topology and its Applications、査読あり、掲載確定
- ② Kenneth J. Shackleton “Tight geodesics and computing distance in the curve complex”、Geometriae Dedicata、査読あり、掲載確定

- ③ Kenneth J. SHACKLETON An acylindricity theorem for the mapping class group, New York J. Math. 査読あり, 16 (2010), 563-573
- ④ Javier ARAMAYONA, Hugo PARLIER, Keneeth J. SHACKLETON Constructing convex planes in the pants complex, Proc. Amer. Math. Soc. 査読あり, Vol. 137, Number 10, October 2009, 3523-3531。

[学会発表] (計 2 件)

- ① Kenneth J. Shackleton, Geodesic axes in the pants complex of the five-holed sphere, Teichmüller theory and its interactions in mathematics and physics, 2010 年 7 月 2 日, Barcelona, Spain
- ② Kenneth J. Shackleton, On the coarse geometry of Weil-Petersson's metric on Teichmüller space, Nevanlinna XXI, 2009 年 9 月 8 日, 京都大学

[その他]

ホームページ等

<http://member.ipmu.jp/kenneth.shackleton/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

シャクルトン ケネス (SHACKLETON Kenneth)  
東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任研究員  
研究者番号：70536870

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：