様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月３１日現在

機関番号：１２６０４
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009～2011
課題番号：21740042
研究課題名（和文）　曲面結び目の図式的性質の解明と新たな不変量の構成

研究課題名（英文）　Elucidation of diagrammatic properties of surface-knots and construction of new invariants of surface-knots

研究代表者
田中　心（TANAKA KOKORO）
東京学芸大学・教育学部・講師
研究者番号：70448950

研究成果の概要（和文）：曲面結び目とは，4 次元空間内の閉曲面の事をいい，また曲面結び目の図式とは，曲面結び目を 3 次元空間に射影した像(の特異点集合に高さの情報を与えたもの)の事をいう．本研究では，曲面結び目の図式的性質の一つであるシート数を，カンドルを用いて調べた．具体的には，11 彩色可能な球面結び目のシート数は 7 以上であることを示した．また，応用として，スパン 6_2 球面結び目のシート数が 7 であることを決定した．

研究成果の概要（英文）：A surface-knot is a closed surface embedded in 4-space, and a diagram of a surface-knots is its projection image into 3-space (whose singularity set is equipped with height information). In this research, we investigate a sheet number of a surface-knot, which is one of its diagramatic properties, by using quandles. Precisely speaking, we show that a sheet number of a 11-colorable 2-knot is at least 7. As an application, we show that spun 6_2 knot has sheet number 7.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何，曲面結び目，結び目，カンドル

１．研究開始当初の背景

曲面結び目の図式的な性質を解明することが，本研究申請時の動機であった．曲面結び目とは，4 次元空間内の閉曲面の事をいい，また曲面結び目の図式とは，曲面結び目を 3 次元空間に射影した像(の特異点集合に高さの情報を与えたもの)の事をいう．曲面結び目理論は，古典的結び目理論(3 次元空間内の単純閉曲線を扱う理論)を 1 次元上げた理論ではあるが，様々な点で異なる現象が起きる事が分かってきている．これは，4 次元の特異さの一端を表していると言え，曲面結び目理論が如何に興味深い研究分野であるかを物語っている．その中でも特に，三重点に関わる性質の解明と，新たな曲面結び目不変量の構成を目指していた．

（１）三重点の性質に関して述べる．曲面結び目の特異点集合はブランチ点・二重点・三重点で構成されるが，(向き付け可能)曲面結

び目はブランチ点のない図式で表せる事が知られている．また，特異点集合が二重点のみから成る図式で表わされる曲面結び目は擬リボン曲面結び目と呼ばれるクラスを成し，球面結び目に対してはリボン球面結び目と呼ばれる古典的によく知られたクラスと一致する事が知られている．その一方で，三重点を持つ図式で表わされる曲面結び目には未知の部分が多く，三重点に関わる性質の解明は非常に重要な問題であった．

（２）新たな不変量の構成に関して述べる．異なる曲面結び目を区別する為に，あるいは曲面結び目の性質を解明する為に，不変量を用いる事は自然である．古くは，補空間のホモトピー型に関わる不変量(曲面結び目群など)や，補空間の無限巡回被覆空間から得られるホモロジー群に関わる不変量(アレキサンダー多項式など)があり，それらの不変量を用いて様々な研究がなされてきた．しかし，これらの不変量は図式と相性の良いものばかりではなかった．

２．研究の目的

（１）三重点の性質に関して述べる．本研究では，最小三重点数と呼ばれる不変量に注目した．これは，三重点に関わる性質を反映した数量的幾何不変量の内の一つであり，同じ曲面結び目を表す図式の中で三重点の個数の最小値として定義される．「最小三重点数が２又は３であるような向き付け可能曲面絡み目は存在するのか？」という問題に取り組むことは一つの目的であった．また，最小三重点数の決定問題に取り組むことも目的の一つであった．具体的には，「自然数 $n>3$ に対して，n ツイストスパン三葉結び目の最小三重点数は $2n$ か？」という問題や，「奇数 $p>3$ に対して，2 ツイストスパン$(2,p)$トーラス結び目の最小三重点数は $2(p-1)$か？」という問題に取り組む．

（２）新たな不変量の構成に関して述べる．近年，Carter 氏らによって，カンドルと呼ばれる代数系を用いて得られる不変量(コサイクル不変量)が構成された．この不変量を用いることで，曲面結び目の図式的な性質を調べやすくはなったが，それでもまだ未知の部分は多く残されていた．そういった状況を考えると，(図式と相性の良い)新たな不変量の構成は，曲面結び目理論に於いて重要な課題であった．

３．研究の方法

（１）最小三重点数が２又は３であるような向き付け可能曲面絡み目の存在性について述べる．過去の研究に於いて，不変量レベルでの分類を終えているので，その分類結果と適合するような例を構成できれば，存在する事が示されるはずである．肯定的な解答が得られない可能性が高まった場合には，図式を丹念に調べ上げ，三重点を消去していくという方針が考えられる．

（２）最小三重点数の決定に関して述べる．Satoh-Shima らはコサイクル不変量を用いて，最小三重点数の決定問題の先行結果を得ていた．その中で彼らは，コサイクル不変量が非自明であるという事に注目していた．本研究では，非自明であるというだけでなく，「不変量の値がどのくらい複雑であるか？」を考察する．

（３）新たな不変量の構成に関して述べる．本研究では，既に定義されている二つの不変量の関係に注目する．一つはカンドル彩色数で，もう一つはコサイクル不変量である．カンドル彩色数は，曲面結び目カンドルから有限カンドルへの準同型写像の個数を数えて得られる不変量である．一方，コサイクル不変量はカンドルのコサイクルを用いて定義される不変量であり，準同型写像を一つ選ぶごとにアーベル群の元を対応させ，それらを準同型写像の数だけ集めたものとして定義される．なお，アーベル群の元を対応させる際に，三重点の情報が反映されている点も注目に値する．すなわち，コサイクル不変量は，カンドル彩色数を三重点の情報を用いて拡張した不変量であると言える．上記の考察を手掛かりとして，Martin による crossed module を用いた不変量を拡張する事で，新たな不変量の構成を目指す．

４．研究成果

（１）カンドル彩色数と曲面結び目のシート数に関して，神戸大学の佐藤進氏の結果を拡張した．具体的には，11 彩色可能な球面結び目のシート数は 7 以上であることを示した．応用として，スパン 6_2 球面結び目のシート数が 7 であることを決定した．これは，東京学芸大学の宇野剛史氏との共同研究である．

（２）Nelson 氏によるラック彩色数を用いた結び目不変量に関して，カンドルとの関係を考察した．Andruskiewitsch 氏-Grana 氏らは，ラックから自然に得られるラック自己同型写像を用いて，ラックからカンドルを構成した．彼らの構成したカンドルを用いることで，Nelson 氏の不変量が持っている情報がある程度分かってきた．この成果については，まだ進展の余地があるため，現在も研究遂行中である．これは，東京学芸大学の谷口裕麻氏との共同研究である．

（３）Crossed module を用いて定義される Martin の彩色不変量の理解とその拡張を試みた. Martinの不変量は, バンド付き結び目による表示を用いて定義されているが, それを図式を用いて再構成することを試みたが, 残念ながら未だ成功に至っていない. また, Crossed module と quandle との間の関係に着目し, 図式を用いて再構成するという方針も試みたが, こちらも残念ながら未だ成功に至らなかった. これらは今後の大きな課題である.

（４）カンドル彩色数とブレイド指数の関係に関しては, 佐賀大学の岩切雅英氏による大きな発展があった. より具体的には, ブレイド指数が 4 である曲面結び目に関して, 位数３の二面体カンドルに付随したコサイクル不変量の取りうる値を分類し, ブレイド指数が５以上となる十分条件を発見した. 岩切氏の手法を丹念に調べることにより, コサイクル不変量とブレイド指数の関係に着目した考察を行った. このアプローチとも関連するが, p 彩色付きのチャートを考え, それを用いて下からの評価を改良する事も試みた. どちらも未だ成功に至っていないが, 今後も継続して研究していく予定である.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Colin Adams, Reiko Shinjo, Kokoro Tanaka,
Complementary regions of knot and link diagrams,
Annals of Combinatorics, 査読有
15 (2011), No. 4, 549--563.

〔学会発表〕（計 10 件）

① 田中　心,
曲面ブレイドのチャート表示とその局所変形について,
研究集会「Hurwitz Action」, [2012 年 1 月 28 日～29 日], 大阪市立大学 学術情報総合センター 文化交流室（大阪府）

② Kokoro Tanaka, Yuma Taniguchi,
Interpretation of rack coloring knot invariants in terms of quandles,
The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, [January 8-13, 2012], KAIST, Daejeon (韓国)

③ 田中　心,
曲面結び目と曲面ブレイドについて,
早稲田大学教育学部数学教室 第９８回７階セミナー, [2010年10月29日, 18:15～19:15], 早稲田大学１４号館７階７１７ＡＢ室（東京都）

④ Atsushi Ishii, Kokoro Tanaka,
Khovanov homology for virtual links with two types of maps for Mobius cobordisms,
International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, [September 27 – October 1, 2010], Colima University, Colima (メキシコ)

⑤ 田中　心,
カンドル理論の曲面結び目への応用について,
第 57 回トポロジーシンポジウム, [2010 年 8 月 11 日～14 日], さん太ホール（岡山県）

⑥ 田中　心,
A recent approach to the smooth 4-dimensional Poincare conjecture,
Friday Seminar on Knot Theory, [2010 年 2 月 5 日, 16:00～17:00], 大阪市立大学数学研究所（大阪府）

⑦ 田中　心,
Studies on surface-knots using quandle theory,
研究集会「４次元トポロジー」, [2010 年 1 月 18 日～20 日], 広島大学（広島県）

⑧ 田中　心,
曲面結び目や曲面ブレイドに関するいくつかの話題,
東京女子大学トポロジーセミナー, [2009 年 12 月 5 日, 13:30～], 東京女子大学 9 号館 9201 教室（東京都）

⑨ 田中　心,
カンドル理論を用いた曲面結び目の研究に関して,
信州大学トポロジーセミナー, [2009 年 11 月 27 日, 16:30～18:00], 信州大学理学部（長野県）

⑩ 田中　心,
Rasmussen 不変量と exotic 4-sphere について
:[Freedman-Gompf-Morrison-Walker, Arxiv: GT.0906.5177] の紹介,
Casson-Freedman 理論研究会, [2009 年 10 月 17 日～20 日], 京都けいはんなプラ

ザホテル（京都府）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.u-gakugei.ac.jp/~kotanaka/

6．研究組織
(1)研究代表者
田中　心（TANAKA KOKORO）
東京学芸大学・教育学部・講師
研究者番号：70448950

(2)研究分担者
（無し）

(3)連携研究者
（無し）