

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 6 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740048

研究課題名（和文） 非コンパクト空間上の幾何解析と無限次元モジュライ空間の幾何

研究課題名（英文） Geometric Analysis on non-compact spaces and the geometry of infinite dimensional moduli spaces

研究代表者

塚本 真輝 (TSUKAMOTO MASAKI)

京都大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：70527879

研究成果の概要(和文):もっとも主要な成果を記す.まず非自明なインスタントンを持たない,向き付き完備4次元リーマン多様体を構成した.3次元球面と直線の直積空間上における,曲率を一様に抑えた反自己双対接続のモジュライ空間の局所平均次元と接続のエネルギー密度との関係を表す評価式を得た.ブロードイ曲線のなす空間の平均次元と曲線のエネルギー密度との関係を表す評価式を得た.特にターゲットがリーマン球面の場合には平均次元をエネルギー密度を用いて表す厳密公式を得た.

研究成果の概要(英文): I concentrate on the most important results. I constructed an example of oriented complete Riemannian 4-manifolds having no non-trivial instanton. We studied moduli spaces of ASD connections whose curvatures are uniformly bounded over the product space of 3-sphere and the line. We got an estimate relating their local mean dimension to the energy densities of connections. We got an estimate relating a mean dimension of the space of Brody curves to the energy densities of curves. In particular we got an exact formula which represents the mean dimension by using the energy densities in the case that the target space is the Riemann sphere.

交付決定額

(金額単位:円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|------|-----------|---------|-----------|
| 21年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 22年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 23年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,300,000 | 990,000 | 4,290,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何, 複素解析, 力学系

1. 研究開始当初の背景

非コンパクト空間上における非線形な幾何解析から生じた無限次元の空間(あるいは力学系)は,従来の数学ではほとんど研究されたことのない未開の研究対象であった.(非

コンパクト空間上でも,2乗可積分コホモロジーなど,線形理論の研究は存在した,しかし非線形の幾何解析から無限次元が出てくる状況となると,ネヴァンリンナ理論を除けば,ほとんど確立されたものはないといって

よいと思われる。) また、そこにおいて基本的な言語となると思われるミハイル・グロモフの平均次元の理論は、創始されてから10年ほど経つが、グロモフ自身とエロン・リンデンシュトラウスによる理論開始当初のいくつかの研究を除いて、あまり大きな進展はこれまでなかった。この未開の領域に少しでも道をつけたいと思い、この研究を開始した。

2. 研究の目的

(1) 非コンパクト4次元多様体上の概 ASD 接続(曲率の自己双対部分が一定に抑えられた接続)の空間の幾何を研究すること、特にディラック作用素をそこに応用すること。

(2) 非コンパクト4次元多様体上で、曲率の絶対値が一様に抑えられた ASD 接続のなす空間(無限次元になり得る)を考え、その平均次元を研究する。特に、その有限性を示す。また、並行して、平均次元の基礎理論の整備を行うこと。

2. 研究の方法

(1) 研究の目的欄の(1)のテーマについて、当初考えていた方法をまず述べる。非コンパクト4次元多様体上で、概 ASD 接続に付随するディラック作用素の性質を解析すること。また、非コンパクト4次元多様体上にエネルギーが有限あるいは無限の ASD 接続を構成すること(あるいは存在するかどうかを究明すること)。

実際には、エネルギー有限の非自明な ASD 接続の非存在が証明できる4次元多様体の存在(複素射影平面の無限個の連結和に適切なリーマン計量を入れたもの)に気が付き、そこに研究を集中させた。その際の研究手法は、ASD 接続に伴うアティヤ・ヒッチン・シンガー複体の性質を解析し、それと倉西の方法を組み合わせるというものである。

また、3次元球面と直線の直積の空間上の ASD 接続に対して、その曲率の作用素ノルムの閾値を関数論・量的ホモトピーのアイデアに刺激されて計算した。

(2) 研究の目的欄の(2)のテーマについて、当初考えていた方法をまず述べる。考えている4次元多様体上に無限個のループを取り、それらに沿ってできる無限個のホロノミーの情報で ASD 接続の空間の適切な離散化ができるかどうかを考察すること。また平均次元の基礎理論の整備を行うこと。

実際には、考察する多様体を3次元球面と直

線の直積としたとき、その局所平均次元がかなり精密に評価可能であることに気づき、そこにまず集中した。手法はゲージ理論版のルンゲ近似定理(ドナルドソンによるアイデア)と無限次元の変形理論である。また、そこから見えてきた新たな視点に基づき、プロディ曲線の変形理論を進展させた。(吉田耕作によって、20世紀前半に導入された、第一類有理型関数という概念の重要性に気が付き、その変形理論を開発した。)

平均次元の基礎理論については、平均次元と力学系の埋め込み問題との関係を、ボルスク・ウラムの定理などを応用して研究した。平均次元の理論と類似した発想の研究である力学モース不等式(メラニエ・バーテルソンとグロモフによる)を、微分トポロジー、実代数幾何、力学系の手法を用いて研究した。

4. 研究成果

(1) 複素射影平面を無限個連結和してできる非コンパクト4次元多様体に適切な計量をいれると、非自明なインスタントン(エネルギー有限の ASD 接続)が存在しないことを証明した。このような多様体の存在はこれまで全く知られておらず、世界初の成果であると考えている。今後の展望としては、まず、より小さな位相型を持つ非コンパクト4次元多様体で同様の性質を持つものが存在するかどうかの究明に興味をそそる。さらにエネルギーが無限大のものまで込めて、非自明な ASD 接続を一切持たない4次元多様体が存在するかどうかにも興味のあるところである。

また、非自明な ASD 接続の存在・非存在との関係で、以下のような成果を得た: 3次元球面と直線の直積空間を考える。この上で(SU(2)をゲージ群とする) ASD 接続の作用素ノルムを考えて、非自明な ASD 接続全体の上での最小値を具体的に決定した。(言い換えると、その値より曲率の作用素ノルムが小さければ、自明な接続になってしまう。)これは、半世紀ほど前に、関数論の研究(有理型関数の球面微分の研究)においてオーリー・レウトによってなされた計算のヤン・ミルズ・ゲージ理論における一つのアナロジーである。結果・証明ともに単純なものであるが、このような計算がゲージ理論において可能であるということは意外性があり、興味をそそることだと考える。

(2) 3次元球面と直線との直積上で、曲率を定数で抑えた ASD 接続のなすモジュライ空間の平均次元について研究した。特に、局所

平均次元と接続のエネルギー密度とを関係づける評価式を示した。(松尾信一郎氏との共同研究。局所平均次元という概念自体も我々がこの研究で導入したものである。)ゲージ理論における平均次元の研究の出発点となり得る成果であると考えている。また、この研究において導入した接続のエネルギー密度という概念は、ネヴァンリンナ理論における特性関数にアイデアを得たものであり、従来のネヴァンリンナ理論とは異なった状況において、エネルギーの漸近分布から有意義な量を取り出すことに成功したということは、かなり大きな意味を持つ成果であると考えている。

非退化なプロディ曲線(もともとは、吉田耕作氏によって、半世紀以上前に、第一類有理型関数という名で導入されたもの)の変形理論の開発に成功し、それを用いてプロディ曲線がなす空間の平均次元を研究した。特にターゲットがリーマン球面の場合に厳密公式を得た。(松尾信一郎氏との共同研究)。幾何的な偏微分方程式の解析から出てくる非自明な状況で、平均次元の厳密公式を得ることができたということは、真に驚くべきことであり、全く先例の無い仕事であると自負している。今後は、ターゲットの空間がより一般の場合などに考察を広げていきたい。また、上記の厳密公式において、プロディ曲線のエネルギー密度の上限という量が出てくるのだが、この値の計算も大変興味をそそる問題である。(この計算に関しては、具体的にどのような値が出るかについて予想を持っており、その証明にアプローチしてみたい。もしそれが成功すれば、従来からの極値問題の研究に、確実に一石を投じるものになるはずである。)

平均次元の基礎理論の探求として、力学系(コンパクト距離空間とその上の同相写像の組)がいつ、区間をアルファベットとするシフト空間(区間の無限直積上にシフト作用を考えたもの)に埋め込めるか、という問題と平均次元との関係を研究した。埋め込み可能性に関して、古典的な場合のアナロジーとなると思われる予想を提出した。また、予想が正しければ、閾値を与えることになる例を構成した。(エロン・リンデンシュトウスとの共同研究。)我々の予想が正しければ、構成した例は、今後の研究において基礎となる重要性を持っており、この分野の研究者たちから頻りに参照されるものになり得る。これからの展望としては、何よりもまず、上記で述べた予想を解くことが重要であろう。その後は、エロン・リンデンシュトウスが構築した理論をさらに整備・拡充していく必要があるはずである。

平均次元と類似した発想の理論である力学モース不等式の問題における、一次元格子模型の横断正則性問題を微分トポロジーの手法を用いて解決した。(浅岡正幸氏、深谷友宏氏との共同研究。)また、同じく一次元格子模型における臨界点の増大度の研究を浅岡正幸氏、深谷友宏氏、三井健太郎氏と共同で行い、マイケル・アルティン、バリー・メーザーやヴァディム・カローシンの微分同相写像の力学系における研究結果と類似した成果(臨界点が指数増大する例の稠密な存在と、超指数増大する非常に不安定な例の豊富な存在、さらに安定な例の存在の証明)を得た。またその証明において、上記のアルティン、メーザー、カローシンの手法の力学モース不等式版を開発した。横断正則性問題や臨界点の増大度問題は、力学モース不等式の研究が今後進展した場合に極めて基礎的な意味を持つものであり、そのような基礎の部分を押さえることができたことは大変喜ばしいと考える。また、我々が考えた安定性を示す例は非常に単純なものであるため、より複雑で深い例の構成(あるいはより進んで、安定なものの良い特徴づけを見つけること)が今後の重要な問題として浮かんできた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

(1) Masayuki Asaoka, Tomohiro Fukaya, Masaki Tsukamoto, Remark on dynamical Morse inequality, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 査読あり, Vol. 87, 2011年発行, pp. 178-182, doi:10.3792/p.jaa.87.178

(2) Masaki Tsukamoto, An open 4-manifold having no instanton, Annals of Global Analysis and Geometry, 査読あり, vo. 40, 2011年発行, pp. 251-286, doi:10.1007/s10455-011-9256-2

(3) Shinichiroh Matsuo, Masaki Tsukamoto, Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension, Journal of Functional Analysis, 査読あり, Vol. 260, 2011年発行, pp. 1369-1427, doi:10.1016/j.jfa.2010.11.008

[学会発表] (計 27 件)

(1) Masaki Tsukamoto, Brody curves and mean dimension, Joint Geometric Analysis/Function Theory Seminar, 2012年3月21日, Purdue University (米国).

(2) Masaki Tsukamoto, Brody curves and mean dimension, 第7回日中友好幾何学研究集会, 2012年1月13日, ホテルレジーナ河口湖 (山梨県).

(3) Masaki Tsukamoto, Brody curves and mean dimension, Group Actions Seminar, 2011年12月1日, Hebrew University (イスラエル).

(4) 塚本真輝, 非コンパクト4次元多様体上のゲージ理論, 日本数学会 特別講演, 2011年9月28日, 信州大学.

(5) Masaki Tsukamoto, An open 4-manifold having no instanton, 2011 Complex Geometry and Symplectic Geometry Conference, 2011年8月15日, University of Science and Technology of China (中国).

(6) Masaki Tsukamoto, Deformation of Brody curves and mean dimension, Dynamics and Probability Seminar, 2011年3月15日, Hebrew University (イスラエル).

(7) 塚本真輝, Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension, The XX1st Rolf Nevanlinna Colloquium, 2009年9月7日, 京都大学.

(8) 塚本真輝, The geometry of the space of Brody curves and mean dimension, 第13回多変数関数論葉山シンポジウム, 2009年7月22日, 湘南国際村センター (神奈川県).

(9) Masaki Tsukamoto, The geometry of the moduli space of Brody curves, 1st PRIMA Congress, 2009年7月7日, University of New South Wales (オーストラリア).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塚本 真輝 (TSUKAMOTO MASAKI)

京都大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号 : 70527879

(2) 研究分担者 ()

研究者番号 :

(3) 連携研究者 ()

研究者番号 :