

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月20日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740051

研究課題名（和文） 葉層多様体における横断的幾何構造の研究

研究課題名（英文） Research of transverse geometric structures on foliated manifolds

研究代表者

森山 貴之（MORIYAMA TAKAYUKI）

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：60532254

研究成果の概要（和文）：（1）トート葉層といわれる葉層構造を持つ多様体において、横断的リーマン構造全体の集合は滑らかな計量を持つ事を示した。（2）トート葉層を持つ葉層多様体において横断的カラビ・ヤウ構造で本質的に異なるもの全体の集合（モジュライ空間）は多様体構造を持ち、ハウスドルフ（特に距離空間）になることを示した。更にいくつかの具体例においてモジュライ空間の次元を計算した。（3）佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体の変形理論を与えた。

研究成果の概要（英文）：(1) We show that there exists a smooth metric on the set of transverse Riemannian metrics on foliated manifolds with taut foliations. (2) We prove that the moduli space of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds with taut foliations is Hausdorff and a smooth manifold, and compute the dimension of the moduli spaces in some examples. (3) We provide a deformation theory of special Legendrian submanifolds in Sasaki-Einstein manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学

1. 研究開始当初の背景

それまでの研究において応募者はプレシンプレクティック多様体の研究を行っていた。プレシンプレクティック多様体とは葉層構造を持ち、その葉層に対して横断的シンプレ

クティック構造を持つ。この事から葉層構造とその横断的な幾何構造に興味を持っていた。特に横断的な幾何学構造がどの程度変形できるか、又それらのなす空間（モジュライ空間）はどのような性質をもっているかとい

う疑問は考えるべき基本的な問題であった。具体例として、横断的ケーラー構造を持つ佐々木多様体は重要な対象であった。実際に数学だけでなく物理学から佐々木多様体に注目が集まっており、特に佐々木・アインシュタイン多様体はカラビ・ヤウ構造との関連性から注目され、研究され始めていた。又、カラビ・ヤウ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体の佐々木・アインシュタイン多様体における対応物である特殊ルジャンドル部分多様体に対してはまだ研究が始まったばかりであった。

2. 研究の目的

(1) コンパクトな葉層多様体における横断的なリーマン構造全体の空間はどのような空間であるか調べる。

(2) 横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間の多様体構造を調べる。更に具体例において横断的カラビ・ヤウ構造がどの程度変形できるか、つまり、モジュライ空間はどのくらい次元を持つかを考察する。

(3) 佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体がどのくらいあるか、又変形するかを調べる。

3. 研究の方法

(1) エビンはコンパクトな多様体上のリーマン計量全体の空間におけるスライス理論、及び滑らかな計量の存在を示した。これを安直に横断的リーマン計量の場合に拡張する事はできない。これは横断的リーマン構造が多様体上の計量を定めないため、多様体上に積分を定義できないからである。そこで葉層構造の方に良い計量が定まっているという仮定を与えてやればこの困難は回避できる。その条件を満たす仮定の一つとしてトート葉層を考える。

(2) 後藤によりコンパクトな多様体におけるカラビ・ヤウ構造及び超ケーラー、 G_2 、スピン7といった構造のモジュライ空間がハウスドルフで滑らかな多様体になるという結果が示された。この証明には楕円型偏微分作用素の理論が使われている。そこでエルカチミによる葉層多様体における横断的楕円型偏微分作用素の理論を用いて後藤の結果を拡張する事ができる。ただし、研究(1)における考察と同様の理由により葉層構造

の方の計量の存在を仮定する必要がある。

又、後藤の理論によってモジュライの次元は多様体のコホモロジーの次元で与えられる事が知られている事から、その横断的幾何構造への拡張においては葉層構造に付随したコホモロジーの次元により与えられると予想される。一般に葉層構造に付随したコホモロジーの計算は複雑になるが、トーラスにおける線形葉層やヌル佐々木多様体といった横断的なカラビ・ヤウ構造を持つ例においては、これらのコホモロジーの計算が知られている。

(3) マクリーンによる閉微分形式によりキャリブレートされる部分多様体の変形理論、特にカラビ・ヤウ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体の変形理論を参考に特殊ルジャンドル部分多様体の場合に適応及び考察する。しかし、佐々木・アインシュタイン多様体にはキャリブレーションの様な微分形式の存在は知られていない。そこでまず、キャリブレーション又はそれに類似する微分形式を探し、次にキャリブレートされる部分多様体の変形理論を拡張する。

4. 研究成果

(1) トート葉層を持つ葉層多様体上において、横断的リーマン構造の空間は滑らかな計量を持つことを示した。

横断的リーマン構造の空間多様体構造を持つ事は知られていたが、滑らかな計量を持つ事は知られていなかった。よって、この結果によりリーマン幾何における諸結果を横断的リーマン構造の幾何に導入できる足がかりとなる。リーマン幾何における重要な定理の拡張が期待される。特に横断的なケーラー構造や横断的なカラビ・ヤウ構造は横断的なリーマン構造を誘導する事からこの結果の応用が期待できる、

(2) トート葉層を持つ葉層多様体上において、横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間はハウスドルフ空間になる事を示し、その次元が葉層構造からくるベーシックコホモロジーの次元で与えられる事を示した。更にいくつかの例でモジュライ空間の次元を計算した。その際にモジュライの次元が多様体の位相構造(特にベッチ数)にのみ依存している例が存在する事が分かった。

この結果の応用として、カラビ・ヤウ軌道体のモジュライ理論が得られる事になる。更にこの結果を得た際の手法は横断的カラビ・ヤウ構造だけでなく、横断的超ケーラー、 G_2 、スピン7といった構造にも適応可能で

ある。又、横断的カラビ・ヤウ構造を持つ多様体の例として(ヌル)佐々木多様体があり、この定理の物理学的意味の解明が期待される。

(3) 佐々木・アインシュタイン多様体を微分形式(ただし、閉微分形式ではない)で特徴付けられる事を示し、特殊ルジャンドル部分多様体はこの微分形式でキャリブレートされる部分多様体になる事を示した。更にこのような閉でない微分形式によりキャリブレートされる部分多様体の変形理論を与えることにより、特殊ルジャンドル部分多様体のモジュライ空間の次元を決定した。更にこのモジュライ空間はある変形のモジュライ空間の交差集合である事が分かった。

この変形理論は特殊ルジャンドル部分多様体の変形だけでなく、閉とは限らない微分形式で特徴付けられる部分多様体の変形理論を与えている。これによりマクリーンによるキャリブレートされる部分多様体(特殊ラグランジュ部分多様体やアソシアティブ部分多様体等)の変形理論を統一的に扱えるようになった。この変形理論はさまざまな部分多様体の変形に応用可能であるため、新しい変形理論の結果が期待できる。

又、特殊ルジャンドル部分多様体は極小部分多様体であるが、極小部分多様体は非常によく研究されている対象であり、さまざまな結果が知られている。これらの手法から特殊ルジャンドル部分多様体を研究することも興味深い。特に極小ルジャンドル部分多様体の変形理論との関係を明らかにする事により新しい結果が期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

(1) Takayuki Moriyama, “The moduli space of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds”, Osaka Journal of Mathematics, 査読有、48巻、2011年、383-413

(2) Takayuki Moriyama, “Deformations of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds”, Publications of the RIMS. Kyoto univ., 査読有、46巻(2)、2010年、335-357

[学会発表] (計13件)

(1) 森山貴之、「佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体の変形について」、日本数学会幾何学分会、2013年3月21日、京都大学

(2) Takayuki Moriyama, “Special Legendrian submanifolds in toric Sasaki-Einstein manifolds”, “UK-JAPAN MATHEMATICAL FORUM” on Geometry, Probability, and their Applications, 2012年7月17日、慶応大学

(3) 森山貴之、「トーリック佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体」、日本数学会幾何学分会、2012年3月27日、東京理科大学

(4) Takayuki Moriyama, “Special Legendrian submanifolds in toric Sasaki-Einstein manifolds”, The 17th International Symposium on “Complex Geometry”, 2011年11月10日、ホテルズントック(長野県)

(5) 森山貴之、「葉層多様体における横断的カラビ・ヤウ構造のモジュライ空間」、第57回幾何学シンポジウム、2010年8月7日、神戸大学

(6) Takayuki Moriyama, “The moduli space of transverse Calabi-Yau structures on foliated Manifolds”, 第2回GCOE若手数学者交流会、2010年2月22日、京都大学

(7) Takayuki Moriyama, “The moduli space of transverse Calabi-Yau structures on foliated Manifolds”, 国際カンファレンス“日中友好幾何学研究集会”、2010年1月30日、OIST(沖縄科学技術研究基盤整備機構) Seaside House

(8) Takayuki Moriyama, “Deformations of transverse Calabi-Yau structures on foliated manifolds”, 国際カンファレンス“Geometry and Quantization”, 2009年9月10日、ルクセンブルク大学(ルクセンブルク)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森山 貴之 (MORIYAMA TAKAYUKI)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：60532254

(2) 研究分担者

特になし

(3) 連携研究者

特になし