

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月29日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740053

研究課題名（和文） ガウス写像の視点からの曲面の大域的性質に関する研究

研究課題名（英文） A study on global properties of immersed surfaces in space forms from the viewpoint of their Gauss maps

研究代表者

川上 裕 (KAWAKAMI YU)

山口大学・大学院理工学研究科・講師

研究者番号：60532356

研究成果の概要（和文）：様々な曲面のクラスのガウス写像の値分布論的性質を調べた。特に、非固有アフィン波面や3次元双曲型空間内の平坦波面といったある種の特異点を許容する曲面のクラスにおいて、弱完備な場合の除外値数の最良の上限を与え、大域的性質であるベルンシュタイン型定理の幾何学的に見通しの良い証明を与えることができた。

研究成果の概要（英文）：We investigated value-distribution-theoretic properties of Gauss maps for several classes of immersed surfaces in space forms. In particular, we can obtain the precise maximum for the number of exceptional values of Gauss maps for weakly complete flat fronts in the hyperbolic 3-space and improper affine fronts in the affine 3-space. As an application of this result, a new simple proof of Bernstein type theorems for these classes was provided.

交付決定額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費      | 合計        |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 2009年度 | 1,700,000 | 510,000   | 2,210,000 |
| 2010年度 | 900,000   | 270,000   | 1,170,000 |
| 2011年度 | 800,000   | 240,000   | 1,040,000 |
| 年度     |           |           |           |
| 年度     |           |           |           |
| 総計     | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ガウス写像、値分布、波面、除外値、完備性、ベルンシュタイン型定理

## 1. 研究開始当初の背景

空間内の曲面の性質は、現実社会に存在する対象であることから古くから活発的に研究されているが、一般に曲面の大域的な性質を調べることは非常に難しい。一方、ユークリッド空間内の極小曲面論では、ガウス写像の視点から大域的性質を調べる研究がある。その研究における重要な問題として「完備極小曲面のガウス写像の除外値問題」があり、幾

つかの先行結果があるが、代数的極小曲面のガウス写像の除外値数の最良の上限を求める問題やこれまでの得られた結果を統一的に説明できる理論が確立されていないなど解決しなければならない問題が残されている。また、このような研究が他の曲面のクラスにおいても有効であるかどうかはこれまでわかっていなかった。

## 2. 研究の目的

先に述べたように、曲面の大域的性質を調べることは非常に難しいが、極小曲面における「ベルンシュタインの定理」と「リュービルの定理」との対応のように、ガウス写像という視点から見ることで幾何学的に理解しやすい状況になることがある。このような考察をもとに、本研究では、ガウス写像の像の様相と曲面の形状との関係を明らかにし、このことをもとにした、曲面の大域的性質を調べる新しい方法を構築することを目的としている。

## 3. 研究の方法

始めに、3次元ユークリッド空間内の極小曲面と局所的対応（ローソン対応）が存在する3次元双曲型空間内の平均曲率が1の曲面のクラスのガウス写像の値分布論的性質について調べた。そのクラスにおいて特に「双曲的ガウス写像」と呼ばれるものに着目し、その値分布と大域的性質との関係について調べた。また、近年活発に研究されている、特異点を許容する曲面の大域的性質についても、ガウス写像の視点から調べた。この研究では、アファイン幾何学や特異点など研究代表者がこれまで専門としてこなかったテーマを扱うことから、その内容について先行研究を行っている九州大学大学院数理学研究院の中條大介博士研究員との共同研究を行った。その結果、3次元双曲型空間内の平坦波面および3次元アファイン空間内の非固有アファイン波面のクラスにおいて、ガウス写像の値分布についての新しい現象を発見し、またこれらのクラスにおけるベルンシュタイン型の定理のガウス写像の視点からの幾何学的に見通しが良い新しい証明を与えることができた。

## 4. 研究成果

(1) 3次元双曲型空間内の平均曲率が1の曲面（CMC-1曲面）の双曲的ガウス写像の値分布論的性質について調べ、完備なクラスにおいては、除外値数の拡張にあたる完全分岐値数の最良の上限は4であることを示した。また、代数的CMC-1曲面のクラスにおいては、代数的極小曲面の場合と同じく、双曲的ガウス写像の完全分岐値数が幾何学的意味をもつ上限により評価されることを示した。さらに、代数的な場合では、完全分岐値数をさらに詳しく調べることで、代数的極小曲面のガウス写像のときは異なる値分布論的性質が存在することを発見した。この研究から、代数的クラスにおける曲面の大域的性質はそのクラスにおける周期条件が大きく関わっていることがわかった。この結果については、【雑誌論文⑥】で発表した。また、この

こととは別に、CMC-1曲面のトライノイドの完全な分類を与えることを梅原雅顕氏、山田光太郎氏らとの共同研究によって得ることができ、【雑誌論文③】で発表した。

(2) 3次元双曲型空間内の平坦波面の双曲的ガウス写像の値分布論的性質について以下に述べる結果を得ることができた。完備な平坦曲面はホロ球面と双曲的円柱しかないが、ある種の特異点を許容した、いわゆる「波面」と呼ばれるクラスまで拡張することでより多くの例が存在し、そのクラスでの大域的性質が期待される。特に、平坦波面の双曲型ガウス写像は有理型関数の対となることから、値分布論的性質が生じる。そこで研究代表者は、平坦波面が完備な場合に対して、我々の分岐評価の結果と國分雅敏氏・梅原雅顕氏・山田光太郎氏によって得られたオッサーマン型不等式を組み合わせることで、この曲面のクラスでの双曲的ガウス写像の除外値数および完全分岐値数に対する幾何学的な量による評価式を与えることができた。また、これを応用することで、幾つかの位相的条件において、より精密な除外値数の上限を与えることができた。そして、これまで知られている例を値分布論的視点から見直すことで、我々が得た評価式の有効性を与えることができ、さらにそのことを示す幾つかの新しい例を発見することができた。この結果については、【雑誌論文②】で発表した。

(3) 九州大学の中條大介氏との共同研究で、弱完備性をもつ3次元アファイン空間内の非固有アファイン波面のラグランジアンガウス写像と呼ばれる有理型関数の除外値数の最良の上限を与えることができた。また、この結果を応用することで、「アファイン完備かつ特異点をもたない非固有アファイン球面は楕円放物面に限る」というベルンシュタイン型定理を、ラグランジアンガウス写像の有界性（リュービル性）から導くことができるといふ新しい証明を発見することができた。この証明により、これまであまり理解されていなかった、ベルンシュタイン型定理の幾何学的背景を明らかにすることができ、波面の研究におけるガウス写像の値分布の研究の新しい応用を与えた。この結果については【雑誌論文①】で発表した。

(4) 3次元双曲型空間内の平坦波面の大域的性質と双曲的ガウス写像の値分布論的性質の関係については(2)で調べたが、この関係では、「特異点を許容しない完備曲面の場合はホロ球面または双曲的円柱に限る」というこのクラスにおけるベルンシュタイン型定理を示すことができなかった。そこで研究代表者は中條大介氏との共同研究で、平坦波

面のワイエルシュトラス型表現公式の際に生じる標準形式の比が有理型関数になることに着目し、弱完備性を仮定した場合のこの関数の除外値数の最良の上限を与えることができた。またこの結果を応用することで、先ほど述べたベルンシュタイン型定理の別証明を与えることができた。(3)の非固有アファイン波面のラグランジアンガウス写像についてもそうであるが、弱完備性における除外値数の最良の評価は値分布論の立場からも非常に重要である。なぜなら、これまでのガウス写像の除外値数の最良の上限は極小曲面のときに知られているように“4”であることが常識であったが、これらのクラスにおいてはより小さい“3”で評価することができたからである。このことから除外値数の上限にはより深い背景があることが期待される。この結果についても【雑誌論文①】で発表した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Yu Kawakami, Daisuke Nakajo, Value distribution of the Gauss map of improper affine spheres, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol. 63, No. 3, 2012, 799–821
- ② Yu Kawakami, Value distribution of the hyperbolic Gauss maps for flat fronts in hyperbolic three-space, Houston Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 38, No. 1, 2012, 115–130
- ③ S. Fujimori, Y. Kawakami, M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada, CMC-1 trinoids in hyperbolic 3-space and metrics of constant mean curvature one with canonical singularities on the 2-sphere, Proceedings of the Japan Academy Ser. A, 査読有, Vol. 87, No. 8, 2011, 144–149
- ④ Yu Kawakami, The value distribution of the Gauss map of improper affine fronts, Mathematisches Forschungstütu Oberwolfach Report, 査読無, Vol. 21, 2010, 1310–1310
- ⑤ Yu Kawakami, Recent progress of the value distribution of the hyperbolic Gauss map, Proceedings of the 16<sup>th</sup> Osaka City University International Academic Symposium 2008, 査読有, 2009, 163–169
- ⑥ Yu Kawakami, Ramification estimates for the hyperbolic Gauss map, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 46,

[学会発表] (計20件)

- ① 川上裕, 曲面のガウス写像の除外値数の上限の幾何学的意味について, 2012年度日本数学会年会函数論分科会一般講演, 2012年3月26日, 東京理科大学(東京)
- ② Yu Kawakami, A ramification theorem for the ratio of canonical forms of flat surfaces in hyperbolic three space, The 10<sup>th</sup> Pacific Rim Geometry Conference 2011 Osaka-Fukuoka Part II, 2011年12月8日, 九州大学西新プラザ(福岡市)
- ③ 川上裕, 波面のGauss写像の値分布とBernstein型定理への応用について, 研究集会:「多様体上の微分方程式」, 2011年11月12日, 金沢大学(金沢市)
- ④ 川上裕, 極小曲面論と函数論との関係について, 第46回函数論サマーセミナー, 2011年9月13日, かんぽの宿別府(別府市)
- ⑤ 川上裕, 波面におけるガウス写像の値分布とその応用, 第58回幾何学シンポジウム, 2011年8月29日, 山口大学(山口市)
- ⑥ Yu Kawakami, The value distribution of the Gauss map of improper affine spheres(Poster), Progress in Surface theory, 2011年5月7日, オーバーウォルバッハ数学研究所(ドイツ)
- ⑦ Yu Kawakami, Value distribution of the Gauss map of improper affine fronts, Spanish-Japanese Workshop on Differential Geometry, 2011年2月16日, グラナダ大学(スペイン)
- ⑧ Yu Kawakami, Value distribution of the Gauss map of improper affine fronts and affine Bernstein problem, 国際研究集会「Differential Geometry and Tanaka Theory」, 2011年1月26日, 京都大学数理解析研究所(京都市)
- ⑨ Yu Kawakami, Value distribution of the Gauss map of wave fronts and its application, The Third International Workshop on Differential Geometry, 2011年1月18日, 佐賀大学(佐賀市)
- ⑩ 川上裕, Value distribution of the Gauss map of fronts and its application, リーマン面・不連続群論研究集会, 2011年1月9日, 大阪国際交流センター(大阪市)
- ⑪ 川上裕, 非固有アファイン波面のガウス写像の値分布, 研究集会「擬リーマン幾何学の展開Ⅲ」, 2010年12月19日, お茶の水女子大学(東京)
- ⑫ 川上裕, 中條大介, 非固有アファイン波

面のGauss写像の除外値数について、  
2010年度日本数学会秋季総合分科会  
幾何学分科会、2010年9月24日、名古屋  
大学（名古屋市）

- ⑬ 川上裕、中條大介、非固有アファイン球面のGauss写像の値分布について、2010年度日本数学会秋季総合分科会函数論分科会、2010年9月22日、名古屋大学（名古屋市）
- ⑭ 川上裕、非固有アファイン波面のガウス写像の除外値問題について、第57回幾何学シンポジウム、2010年8月7日、神戸大学（神戸市）
- ⑮ 川上裕、ガウス写像の値分布から導かれる曲面の大域的性質について、金沢大学数理学談話会、2009年12月16日、金沢大学（金沢市）
- ⑯ 川上裕、曲面のガウス写像の分岐評価について、研究集会「部分多様体論・湯沢2009」、2009年11月27日、湯沢グランドホテル（湯沢町）
- ⑰ Yu Kawakami、The hyperbolic Gauss maps of flat fronts in hyperbolic three space、研究集会「Holomorphic Mappings and Related Diophantine Approximation」、2009年10月9日、東京大学・玉原国際セミナーハウス（沼田市）
- ⑱ 川上裕、平坦フロントの双曲的ガウス写像の分岐評価、2009年日本数学会秋季総合分科会幾何学分科会、2009年9月24日、大阪大学（大阪市）
- ⑲ Yu Kawakami、Ramification estimates for the Gauss map of various surfaces (Poster)、XXI-st Rolf Nevanlinna Colloquium、2009年9月8日から10日まで、京都大学（京都市）
- ⑳ Yu Kawakami、On the upper bound of the number of exceptional values of the hyperbolic Gauss map、研究集会「可積分系と幾何学の融合」、2009年4月19日、東北大学（仙台市）

〔図書〕（計1件）

- ① 梅原雅顕述、川上裕記、名古屋大学大学院多元数理科学研究科、3次元双曲型空間内の平均曲率1の曲面 — 極小曲面との関係をテーマとして — 多元数理科学講究録 Vol. 9、2009、74ページ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

川上 裕 (KAWAKAMI YU)  
山口大学・大学院理工学研究科・講師  
研究者番号：60532356