様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年６月１１日現在

機関番号：13902
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2011
課題番号：21740058
研究課題名（和文）リフト・拡張・拡張リフトを用いた安定写像の分解の研究

研究課題名（英文）Study of factorization of stable map using lift, extension and extension-lift

研究代表者
山本　稔（YAMAMOTO　MINORU）
愛知教育大学・教育学部・講師
研究者番号：40435475

研究成果の概要（和文）：向き付けられた境界付き曲面に対し，境界のカラー近傍からの Morse 関数を考える．この Morse 関数がいつ元の曲面から平面へのはめ込みに拡張リフトするかという問題について研究し，はめ込み拡張リフトの存在，非存在の判定法を与えた．
向き付けられた閉曲面から３次元空間へのはめ込みと平面への安定写像の関係について考察した．平面への安定写像を１つ固定した時，それのリフトとして得られるはめ込みを正則ホモトピーで分類した．

研究成果の概要（英文）：For an oriented once punctured surface, we consider a Morse function of collar neighborhood of the boundary to the line. We study the question when this Morse function has an extension-lift of the original surface to the plane. We give a judgment of existent and non-existent law.
We consider the relationship between an immersion of an oriented surface into the 3-space and a stable map into the plane. When we fix a stable map into the plane, we classify immersions which are lifts of this stable map up to regular homotopy.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分トポロジー

１．研究開始当初の背景
空間内の物体を観測するとき，観測者は文体の輪郭に注目する．この輪郭が特異点と呼ばれる物である．特異点を調べる事でその物体の「形」や空間内における物体の「位置」に関する情報を引き出す事が可能である．これがトポロジーにおける特異点論の基本理念である．
微分トポロジーにおいて特異点論は可微分写像の大域的特異点論と呼ばれており，多様体の微分構造といった「形」の研究や，写像空間の構造といった「位置」の研究が安定写像を用いて行われている．ここで安定写像とはホモトピーで少し摂動したものと常に左右同値である様な写像の事であり，臨界値が全て異なる Morse 関数がその一例である．Mather の意味で nice range と呼ばれる次元対では安定写像は写像空間内 open dense に

存在する．そのため安定写像は自然な研究対象である．
私はこれまで可微分写像の大域的特異点論の分野において空間内における物体の「位置」の研究に興味を持って取り組んできた．今回の研究期間では安定写像の埋め込みリフトの研究をさらに深めるため，「リフト・拡張・拡張リフトを用いた安定写像の分解の研究」というテーマを設定した．
動機は次に由来する．3 次元空間内の物体を観測した際，観測者は網膜に映った特異点の像からもとの曲面全体を復元している．即ち，閉曲面から平面への安定写像を 3 次元空間への閉曲面のはめ込みにリフトさせる操作を行っている．また観測する対象である 3 次元空間内の物体は中身のある曲面である方が現実的である．そこで，閉曲面から平面への安定写像を境界付き 3 次元多様体から平面への沈め込みに拡張させる操作，境界付き 3 次元多様体から 3 次元空間へのはめ込みに拡張リフトさせる操作も同時に考察する必要がある．この様に空間内にはめ込まれた中身付きの物体を「見る」という行為を大域的特異点論の立場から改めて捉え直そうというのが今回の研究の背景であった．

２．研究の目的
安定写像のリフトの研究は Haefliger , Levine, Kudryavtseva 等により，具体的な次元対ではめ込みにリフトするための必要十分条件が与えられている．
一方，安定写像の拡張の研究は Blank—Laudenbach, Francis, Curley 等により，具体的な次元対ではめ込みや沈め込みへ拡張するための必要十分条件が与えられている．
この様に安定写像のリフト・拡張の研究は具体的な次元で個別に研究はされている．しかし，次元を一般化しての研究は Pappas によるはめ込みへの拡張の研究，Blank—Curley による，はめ込みへのリフト並びに沈め込みへ拡張させる研究しかなされていない．
以上の状況を踏まえ，「n 次元多様体から p 次元空間への安定写像に対し，n 次元多様体を境界に持つ n+1 次元多様体から p+k 次元空間へのはめ込みで，与えられた安定写像の拡張リフトとなるものが存在するための必要十分条件を求めよ」という問題を考察する事にした．即ち，安定写像の分解という視点から，リフト，拡張，拡張リフトの問題を同時に取り扱う事を今回の研究の大目標とした．
まずはリフトまたは拡張のどちらか一方の研究しかなされていないものに対し，もう片方の研究を行う．次にこれらの具体的な次元対に対して，拡張リフトを構成し，リフト・拡張・拡張リフトの問題を同時に扱う研究へと考察を深めて行く．
さらに以上の研究をふまえて次元を一般化し，安定写像の分解という視点から，リフト・拡張・拡張リフトの問題を同時に取り扱う．

３．研究の方法
安定写像の分解の研究は今まで低次元多様体を対象としてばらばらに行われてきた．
まずはリフトか拡張の問題のどちらか片方しか行われていない次元対に対して，もう片方の研究を行い，状況を整理する．次にこれらの結果を組み合わせ，低次元多様体からの安定写像を固定した上で，リフト・拡張・拡張リフトを同時に観察する．これにより，境界付き多様体のユークリッド空間へのはめ込まれ方を境界からの安定写像の特異点の情報に帰着させるという方法を計画している．
ここで，固定する安定写像が同次元多様体間の安定写像の場合は，先行研究で用いられていた Stein 分解という手法は使えない．そのため Stein 分解に変わる新しい道具の開発が必要になる．そこで最初の取り組みとして，円周からの Morse 関数のリフト・拡張・拡張リフトを研究する．これにより，次元をあげる際の足がかりを作る．
一方，異なる次元間の安定写像の場合，固定する安定写像の特異点や特異ファイバーが複雑になると，リフト・拡張・拡張リフトの解析が困難になる事が予想される．その際は安定写像の特異点を最も簡単な物，即ち折り目特異点や定値折り目特異点に制限しておいて研究に取りかかり，順に特異点・特異ファイバーを複雑にする手法をとる．

４．研究成果
(1) 向き付け可能な閉曲面から平面への折り目写像で，3次元空間への埋め込みリフトを持つものを考える．この折り目写像を，折り目写像である事を保って1パラメータ族で変形させた時，3次元空間内のアイソトピーにいつリフトするかという問題について研究した．そして，閉曲面が球面で折り目特異点の連結成分数が1の時のみ常にアイソトピーリフトは存在し，それ以外のときはアイソトピーリフトが存在しないない例がある事を，具体例を構成する事で示した．この研究は折り目写像に限らず，安定写像の埋め込みリフトの研究，安定写像を固定した上での埋め込みリフトのアイソトピー類の決定，安定写像の変形とアイソトピーリフトの関係という未解決の問題に繋がってゆく．この様に進展する可能性が十分にある研究対象であるため，研究課題の1つとして今後も精力的に取組む予定である．

(2) 向き付けられた境界つき曲面に対し，境界のカラー近傍からのMorse関数を考える．このMorse関数がいつ元の曲面から平面へのはめ込みに拡張リフトするかという問題について研究した．与えられたMorse関数の正則点集合から構成されるvirtual Reeb graphを調べる事で，はめ込みへの拡張リフトの存在，非存在が判定出来る事を示した．またはめ込み拡張リフトをイメージホモトピーと呼ばれる同値関係で分類し，はめ込み拡張リフトがどの程度存在するかも決定した．この結果を足がかりに，円周から直線へのMorse関数の埋め込み拡張リフトの研究．閉曲面から平面への安定写像のはめ込み，埋め込み拡張リフトの研究と対象を広げてゆく事が今後の研究課題である．

(3) 向き付けられた閉曲面から３次元空間へのはめ込みと平面への安定写像の関係を研究した．まず平面への安定写像を１つ固定した時，それのリフトとして得られるはめ込みを正則ホモトピーで分類した．
次に平面へのジェネリックホモトピーが空間の正則ホモトピーにリフトするための条件を与えた．これらの応用として，以下の研究を行った．

(4) (3)の研究の応用として，空間内に埋め込まれた，向き付けられた球面を平面への安定写像に射影する．ジェネリックホモトピーによってこの安定写像を変形させる事で，リフトが球面の裏返しになっているものを具体的に構成した．これにより球面の裏返しの様子の新たな記述法を与えた．次に名古屋工業大の平澤美可三先生と共に，このジェネリックホモトピーを用いて，空間内の球面の裏返しの様子を再構成した．
さらに球面同様，空間内に埋め込まれた，向き付けられたトーラスについても，平面への安定写像の射影と，リフトが正則ホモトピーとなる様なジェネリックホモトピーによってトーラスの裏返しを具体的に構成した．これによりトーラスの裏返しの様子の新たな記述法を与えた．古典的にはトーラスのメリディアンとロンジチュードを入れ替える裏返しが知られていたが，今回はロンジチュードを変化させず，メリディアンを 2k(ロンジチュード)+(メリディアン)という閉曲線に変化させる裏返しも構成した．
今後は向き付け不可能な閉曲面についても同様の研究を進めると共に，空間内のはめ込みのイメージホモトピー類と平面への安定写像の関係を調べる事を計画している．

(5) (2)で述べた今後の研究課題の1つに取組んだ．向き付けられた閉曲線から直線への(安定とは限らない)Morse関数が平面への埋め込みにリフトするための必要十分条件を与えた．この結果より，Morse関数の最大値，最小値を与える点集合の閉曲線上の配置が，埋め込みリフトの存在に密接に関わる事が分かった．さらに安定なMorse関数を1つ固定した上で，それのリフトとして得られる埋め込みをアイソトピーで分類せよという問題についても考察を行った．しかしこちらについてはまだ決定的な結果は得られていないため，今後の研究課題とする．さらにはn次元閉多様体からn次元空間への安定写像の埋め込みリフトのアイソトピーによる分類へと次元を上げてゆく事が今後の目標である

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
① 山本稔，On immersed oriented surfaces and their plane projections，数理解析研究所講究録，査読無，No.1764，2011，165-173
② Minoru YAMAMOTO，Immersed extension-lift over a Morse function，Topology and its Applications，査読有，No.158，2011，611-619
③ Minoru YAMAMOTO，The number of singular set components of fold maps between oriented surfaces，Houston Journal of Mathematics，査読有，No.35，2009，1051-1069
④ Minoru YAMAMOTO，Pseudo-immersions of oriented surfaces with one boundary component into the plane，Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A. Mathematics，査読有，No.139，2009，1327-1335

〔学会発表〕（計５件）
① 山本稔・平澤美可三，球面の裏返し（new method)，名城大学幾何セミナー，2012 年 2 月 28 日，名城大学
② 山本稔，空間内にはめ込まれた閉曲面とその平面像との関係，近畿大学数学教室講演会，2011 年 1 月 21 日，近畿大学
③ 山本稔，空間内の閉曲面とその平面像について，結び目の数理セミナー Knotting Nagoya，2010 年 8 月 21 日，名古屋市立大学
④ 山本稔，On immersed oriented surfaces and their plane projections，実閉体上の幾何と特異点論への応用，2010 年 12 月 3 日，京都大学数理解析研究所
⑤ Minoru YAMAMOTO，Pseudo-immersions of oriented surfaces with one boundary component into the plane，Manifolds and

mappings seminar, 2009 年 8 月 21 日, Moscow State University

６．研究組織

(1)研究代表者

山本　稔 (YAMAMOTO MINORU)

愛知教育大学・教育学部・講師

研究者番号：40435475

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：