

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 16 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740059

研究課題名（和文）レース展開の発展とその前衛的研究

研究課題名（英文）Advancement of the lace expansion and its applications

研究代表者

坂井 哲（SAKAI AKIRA）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：50506996

研究成果の概要（和文）：高次元臨界現象を数学的に厳密に解析できる数少ない（モデルによっては殆ど唯一の）手段に「レース展開」がある。この強力な解析手法を発展させ、2 体相互作用係数が距離の冪で減衰する自己回避歩行や有向パーコレーションの 2 点関数の漸近挙動を精密に求めることに成功した。また、2 体相互作用係数の台が有限である臨界コンタクトプロセスを考え、時空間 n 点関数のスケーリング極限が超ブラウン運動標準測度の $n-1$ 多点関数に一致することを証明した。

研究成果の概要（英文）：The lace expansion has been one of the few mathematically rigorous approaches to investigate critical behavior in high dimensions. We have extended this methodology to obtain a universal sharp asymptotic expression of the 2-point functions for long-range self-avoiding walk and long-range oriented percolation which are defined by power-law decaying pair potentials. We have also investigated the finite-range (but sufficiently spread-out) critical contact process and proved that the n -point function under the Brownian scaling converges to the $(n-1)$ -point function for the canonical measure of super-Brownian motion.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率論

1. 研究開始当初の背景

温度を変えると磁石が磁性を失ったり、水が沸騰して蒸発するといった現象には馴染みが深い。このように温度などの巨視的なパラメータが変化するとき、一つの物理系が質的に全く異なる状態に遷移する現象を相転移といい、そのギリギリのパラメータ値を臨

界点という。特に系の「物差し」である相関距離の発散を伴う臨界点付近では、様々な量が冪的な特異性を示し、マクロとミクロの区別がつかない（スケール不変、フラクタル）。このような現象を臨界現象といい、その冪指数たちを臨界指数という。この臨界指数に関して興味深いことは、その値をもとに物理系

は分類できると考えられている点である（臨界指数の普遍性）．例えば、水と磁石は全く異なる物理系であるにも拘らず、臨界指数の値は一致することを示唆する実験事実がある．こうした臨界指数の普遍性を数理モデルを用いて理論的に完全に理解することは、確率論、統計力学、数理物理の重要課題の一つである．

一般に臨界指数の存在性を証明すること、更にそれらの値を求めることは極めて難しい．その最大の理由は、考えている系の構成要素が互いに強く影響を及ぼし合っているからである．もし構成要素間の相互作用を忘れて互いが独立であるとする、様々な量はランダムウォーク（＝独立確率変数列の和）を用いて表わすことが出来てしまい、臨界指数の存在性やそれらの値は自明となる．これを平均場臨界現象と呼ぶ．実際の系では、空間次元 d が十分大きいとき、臨界現象が平均場的なものに退化してしまうことが予想されていた（その境目の次元を上部臨界次元という）．この予想が正しいことを数学的に厳密に証明できる数少ない（モデルによっては殆ど唯一の）手法の一つがレース展開である．

これまでにレース展開の手法が成功した数理モデルは、高分子鎖の統計力学モデルである自己回避歩行、ランダムな媒質への浸透過程を記述するパーコレーション、伝染病が蔓延していく様子をモデル化したコンタクトプロセス、磁石の統計力学モデルとして古くから用いられているイジング模型などである．レース展開の手法は非常に強力で、これらの成功例に対しては2点関数の漸近的な振る舞いまで完全に分かる．一方、従来のレース展開の弱点は、モデルを定義する2体相互作用係数が（2次モーメントが収束する程度に）短距離で、かつ空間的に均質な場合に限られていたこと、また超臨界相（コンタクトプロセスであれば病気の蔓延相、イジングモデルであれば低温相すなわち自発的対称性の破れた相のこと）側からの臨界点への接近は扱えなかったこと、などである．

2. 研究の目的

以上の背景を踏まえ、レース展開の適用範囲を広げるべく、以下4課題の解決を図った．

課題（1）：長距離2体相互作用による臨界現象への影響について．2体相互作用係数が2体間距離 r に対して r^{-a} （ただし $a > 0$ ；特に $a \geq 2$ のときは、2体相互作用係数の2次モーメントが発散する）のように冪的にゆっくり減衰するような長距離相互作用の場合、 a の値に応じてスケールング極限がどのように影響を受けるのか明らかにする．

課題（2）：コンタクトプロセスの超ブラウン運動標準測度への収束について．臨界コンタクトプロセスの n 点関数のスケーリ

ング極限を求める．この結果は、臨界コンタクトプロセスが「超ブラウン運動」と呼ばれる確率超過程の標準測度へ有限次元分布の意味で収束するかどうかを決定する重要な研究と関係がある．

課題（3）：超臨界相パーコレーションのレース展開について．従来のレース展開により、未臨界相での臨界指数は、高次元で平均場的となることが分かっている．他方、繰りこみ群などにより、超臨界相での臨界指数は、それと共役な未臨界相での臨界指数と同じ値を取るものと信じられている．我々は有限2点関数（異なる2点の一つの有限連結クラスター上に存在する確率）に対するレース展開を開発し、高次元において上の予想が正しいことを確かめる．

課題（4）：ランダムな環境下の有向パーコレーションの臨界現象について．レース展開で得られる再生方程式は、モデルを定義する2体相互作用係数の並進対称性などを仮定しないで成り立つ．我々はボンド占有確率が時空間でランダムな場合、高次元有向パーコレーションの臨界現象がどのように影響を受けるのか明らかにする．

3. 研究の方法

課題（1） 長距離相互作用モデルの解析に必要な解析手段に詳しい台湾の Lung-Chi Chen 教授と相互訪問をし、研究打ち合わせを行なった．また、その結果を纏めて論文を執筆．草稿はEメールでやり取りした．

課題（2） 以前からの共同研究者であるオランダの Remco van der Hofstad 教授と相互訪問をし、研究打ち合わせを行なった．また、その結果を纏めた94ページの長大な論文を分担執筆．草稿はEメールでやり取りした．

課題（3） パーコレーションの高次元臨界現象に詳しい九州大学の原隆教授と相互訪問をし、意見交換を行なった．

課題（4） まず取り掛かりとして、二重のランダムネスを扱った簡単な例として「ランダム媒質中の有向ポリマー」を勉強し始め、ランダムな環境下の有向パーコレーションに対するレース展開に有効な視点を獲得することを目指した．

4. 研究成果

課題（1） 自己回避歩行や有向パーコレーションの劣臨界相および臨界相における2点関数（のフーリエ変換や回転半径）を精密に調べ、その漸近挙動のパラメータ a 依存性を露わにした．端的に言うと、 $a \geq 2$ のときは $d > 4$ でガウスの（ $a=2$ では対数補正が掛かる）であり、 $a < 2$ のときは $d > 2a$ でパラメータ a の安定分布のように振る舞うことを証明した．ここに現れた次元の下限は上部

臨界次元であり, a によって値が変わることが我々の先行研究で知られていた. 今回さらに, 極限に現れる比例定数も $a=2$ を境に表現が変わること (クロスオーバー) を証明した. これらの結果は, 後述の雑誌論文①, ③, ④に収められている.

課題(2) 2体相互作用係数の台の差し渡し L が有限である臨界コンタクトプロセスを考え, その n 点関数 (時空間原点 $(a, 0)$ から発生した病気に $n-1$ 個の時空間の点 $(x_1, t_1), \dots, (x_{n-1}, t_{n-1})$ が感染する確率) のスケールング極限が $d=4$ (かつ $L \gg 1$) では超ブラウン運動標準測度の $n-1$ 点関数に等しいことを証明した. 次元 d が上部臨界次元 4 以下の場合, L を時間の適当な冪 $(\propto (4-d)/(2d))$ で増大させることにより, 同様のスケールング極限が得られることも証明した. この結果は, 後述の雑誌論文②に収められている. これにより, 最近 Holmes らによって発表された「生存確率」に関する研究結果 (2011 年 10 月発表) と組み合わせると, 高次元臨界コンタクトプロセスが超ブラウン運動標準測度に有限次元分布の意味で収束することが決定されたことになる.

課題(3) 世界でも未だ低温相臨界現象の描像をきちんと獲得した先行研究が無い状態が続いており, 我々も独自の思考実験を積み重ねている段階である.

課題(4) 「ランダム媒質中の有向ポリマー」の専門家が複数居るオランダの Universiteit Leiden を訪問して, 意見交換を行なった. 本課題に有効な手法は未だ見つかっていないが, 現在も Leiden のグループと交流中である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

①Akira Sakai, Lung-Chi Chen, Asymptotic behavior of the gyration radius for long-range self-avoiding walk and long-range oriented percolation, *The Annals of Probability*, 査読有, Vol. 39, 2011, 507-548,

DOI:10.1214/10-AOP557

②Akira Sakai, Large-time asymptotics of the gyration radius for long-range statistical-mechanical models, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, Vol. 21, 2011, 53-62,

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

③Remco van der Hofstad, Akira Sakai, Convergence of the critical finite-range contact process to super-Brownian motion above the upper critical dimension: The higher-point functions, *Electronic Journal of Probability*, 査読有, Vol. 15, 2010, 801-894,

DOI:10.1214/EJP.v15-783

④Akira Sakai, Lung-Chi Chen, Critical behavior and the limit distribution for long-range oriented percolation. II: Spatial correlation, *Probability Theory and Related Fields*, 査読有, Vol. 145, 2009, 435-458,

DOI:10.1007/s00440-008-0174-6

[学会発表] (計 12 件)

①Akira Sakai, Asymptotic behavior in Z^d of the critical two-point functions for statistical-mechanical models with power-law decaying potentials, VU Probability Seminar, 2012 年 3 月 19 日, Vrije Universiteit Amsterdam (オランダ)

②Akira Sakai, Asymptotic behavior in Z^d of the critical two-point functions for statistical-mechanical models with power-law decaying potentials, New Zealand Probability Workshop & Australia and New Zealand Applied Probability Workshop, 2012 年 1 月 24 日, The University of Auckland (ニュージーランド)

③Akira Sakai, Asymptotic behavior in Z^d of the critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions, The 7th HU and SNU Symposium on Mathematics “Recent Developments in Mathematical Analysis and Related Fields”, 2011 年 11 月 17 日, Seoul National University (韓国)

④坂井 哲, 臨界現象の厳密な解析を目指して, 語ろう数理解析, 2011 年 9 月 6 日, 北海道大学

⑤坂井 哲, 臨界現象の数理, 第 8 回城崎新人セミナー, 2011 年 2 月 16 日, 城崎市民センター (兵庫県豊岡市)

⑥Akira Sakai, Applications of the lace expansion to the ϕ^4 model, Conference on Probability Theory, Statistical Physics, and Applications, 2011 年 1 月 16 日, New

York University Abu Dhabi Institute (UAE)

⑦坂井 哲, Asymptotic behavior in \mathbb{Z}^d of the critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions, 確率論シンポジウム, 2010年12月20日, 京都大学

⑧Akira Sakai, Lace expansion in the past and future, The 34th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 2010年9月7日, 千里ライフセンター (大阪市)

⑨坂井 哲, The lace expansion for lattice models in high dimensions, 第11回北東数学解析研究会, 2010年2月23日, 北海道大学

⑩Akira Sakai, Asymptotic behavior in \mathbb{Z}^d of the critical two-point functions for long-range statistical-mechanical models in high dimensions, Above the Critical Dimension, 2009年12月9日, The Institut Henri Poincaré (フランス)

⑪坂井 哲, Asymptotic behavior of the gyration radius for long-range self-avoiding walk and long-range oriented percolation, 第8回大規模相互作用系の確率解析, 2009年10月8日, 東京大学

⑫坂井 哲, Asymptotic behavior of the gyration radius for long-range self-avoiding walk and long-range oriented percolation, 繰り込み群の数理科学での応用, 2009年9月10日, 京都大学

⑬Akira Sakai, Asymptotic behavior of the gyration radius for long-range self-avoiding walk and long-range oriented percolation, Scaling Limits in Models of Statistical Mechanics, 2009年8月19日, The Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

① SPA サテライト研究集会 “Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics” 主催, 2010年8月30日~9月3日, 北海道大学

② ホームページ等
<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~sakai/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂井 哲 (SAKAI AKIRA)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 50506996

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし