

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 16 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740060

研究課題名（和文）

離散凸関数の制約付き最適化問題に対する高速高精度なアルゴリズムの構築

研究課題名（英文） Development of Efficient and Accurate Approximation Algorithms for Constrained Optimization of Discrete Convex Functions

研究代表者

塩浦 昭義 (AKIYOSHI SHIOURA)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：10296882

研究成果の概要（和文）：

本研究では、申請者が近年携わってきた離散凸解析の理論に基づき、計算時間や解の精度の面で理論的な保証をもつアルゴリズムを構築することを目的とした。3年間の間に様々な結果を得ることが出来たが、とくに、複数のナップサック制約の下でのM凹関数の最大化問題に対して、多項式時間近似スキームを構築することに成功した。また、近傍システムという、一般的な解集合の構造を明らかにするとともに、近傍システムに関する分離凸最適化問題が多項式時間で解けることを示した。

研究成果の概要（英文）：

The aim of this research is to develop algorithms with theoretical guarantee for both of computational time and quality of solutions by using the theory of discrete convex analysis. During the three years of the research period, I have obtained various new results. In particular, I developed a polynomial-time approximation scheme for the maximization of an M-concave function under multiple knapsack constraints. In addition, I revealed the structure of a general solution set called a neighbor system, and showed that the minimization of a separable-convex function over a neighbor system can be solved in polynomial time.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：離散最適化，組合せ最適化，数理計画，離散凸関数，近似アルゴリズム，アルゴリズム，マトロイド，劣モジュラ関数

1. 研究開始当初の背景

生産計画, 最適投資, ロジスティクス, 画像処理, システム設計などの様々な分野において, 従来から大規模な離散最適化問題を高速に解く必要性が認識されている. とくに近年では, 扱われる最適化モデルの多様化に伴って, 非線形な凸関数を目的関数とする制約付き離散最適化問題を解く効率的なアルゴリズムが必要とされている. これに対して, 今までは分枝限定法などを用いた厳密解法や, ヒューリスティクスに基づく近似解法の研究が盛んに行われてきた. しかし, これらのアルゴリズムは実験を通じた評価しか行われておらず, 計算時間や近似解の精度に対する理論的な保証は全くない.

一方, 非線形離散最適化問題に対する理論的な研究も近年では盛んに行われている. とくに, 「解きやすい」非線形離散最適化問題の理論的な枠組みを構築することを目的として, 「離散凸解析」という理論体系が室田氏(東京大)によって1996年に提唱された. 離散凸解析ではM凸関数とL凸関数という2種類の離散凸関数の概念が提案されており, M凸/L凸関数の組合せ構造, アルゴリズム, 応用などの面で申請者は室田氏と共同で研究を行ってきた. とくに, アルゴリズム開発については申請者が中心となって研究を進めており, M凸関数やL凸関数の制約なし最小化問題に対して効率的な多項式時間アルゴリズムを提案してきた. しかし, 制約付きの最適化問題に対する研究はほとんど手つかずの状態であった. 一般に, 離散凸関数に関する制約付き最適化問題は計算困難(NP困難)な問題であるため, 効率的な解法の構築が難しく, 今後の課題とされてきた.

2. 研究の目的

本研究では, M凸関数およびL凸関数を目的関数とする制約付き最適化問題に対し, 効率的なアルゴリズムを構築することを目的とする. 計算時間と解の精度の両面からアルゴリズムを評価し, 実験的にも理論的にも高速かつ高精度なアルゴリズムを提案することが本研究のねらいである. 具体的な研究内容は以下の通りである.

(1) 非負係数の線形不等式系として与えられるナップサック制約は汎用性の高い制約であり, 様々な応用で用いられている. 例えば, 数理経済学における財の配分問題では, ナップサック制約付きのM凸関数(の和)の最小化という問題が自然な形で生じる. 本研究では, まず最も基本的な制約付き最適化問題として, ナップサック制約付きM凸関数最小化問題(以下KMMP)に取り組む. この問題は計算困難な問題であることが知られてお

り, 多項式時間で最適解を求めることは絶望視されている. そのため, 効率的に近似解を求めるアルゴリズムの開発が目的となる. KMMPの組合せ的構造を解明し, どのくらい高精度な近似解が得られるか, 理論的に解析を行う. 特に, 任意の精度の近似解を多項式時間で求めるといふ, 多項式時間近似スキームがKMMPに対して存在するかどうか検討する. さらに, KMMPに対して得られた知見を元に, 複数のナップサック制約の下で複数のM凸関数の和を最小化するという, より一般的な問題にも取り組む.

(2) 制約が整数格子点の集合として与えられる場合について考える. M凸関数はもともと整基多面体と呼ばれる集合上で定義される関数であり, 多項式時間で最小化できることが知られていた. 近年の結果により, ジャンプシステムという集合の上でも多項式時間最小化が可能であることがわかった(業績[3]). この研究をさらに進め, より一般の整数格子点集合においても多項式時間最小化が可能かどうか, 調査する. また, 多項式時間最小化が難しい場合には精度保証付きの近似解を求めることが可能かどうか, 検討を行う. この研究の手がかりとして, 最近ハートヴィグセン氏(アメリカ・ノートルダム大)により提案された近傍システム(neighbor system)という概念がある. 近傍システムはジャンプシステムなどを含む, きわめて広い集合のクラスであり, 多項式時間で線形関数最適化が可能であることがわかっているが, M凸関数の多項式時間最小化が可能かどうか, 調査する.

(3) 画像処理への応用を念頭に置いてL凸関数の制約付き最小化について研究を行う. 画像処理における理論研究の専門家であるコルモゴロフ氏(イギリス・ロンドン大学)との最近の共同研究により, 画像処理に関する幾つかの問題がL凸関数の制約なし最小化問題として定式化できることがわかり, この問題に対する効率的なアルゴリズムを提案した. しかし, 画像処理に関する多くの問題はL凸関数の制約付き最小化問題という形をしており, 計算困難な問題が多い. このような問題に対し, 離散凸解析の視点から問題の組合せ構造を解析し, 高精度の近似アルゴリズムを構築することを目指す. これにより, 画像処理の問題に対する有効なアプローチを提示できると期待される.

3. 研究の方法

本研究では大きく分けて3種類の制約付き最適化問題を扱うが, いずれに対しても次の手順でアルゴリズムの開発及び性能評価を行う.

まず、問題の組合せ構造の解析を行い、計算複雑度の把握をする。そして、最適解（もしくは）近似解をもつ解法を構築する。その解法に対し、計算時間と解の精度の理論的な解析を行うと共に、応用問題に適用したときの有効性の評価を行う。

具体的な計画は以下の通りである。

- (1) ナップサック制約の下でのM凸関数（の和）の最小化の研究
 - ① ひとつのナップサック制約の下でひとつのM凸関数を最小化する問題の組合せ構造を調べると共に、その計算複雑度を同定する。それを元に、効率的・高精度な近似解法を提案する。
 - ② 上記の問題に対する成果を元にして、ナップサック制約が複数の場合、および目的関数が複数のM凸関数の和で与えられる場合の問題に取り組む。
- (2) 整数格子点集合上でのM凸関数最小化の研究
 - ① 近傍システムの組合せ構造を解析し、M凸関数最小化の最適性条件を示す。
 - ② 近傍システム上でのM凸関数最小化に対する貪欲算法を構築する。
 - ③ M凸関数最小化に対する既存のアプローチを調査・整理し、近傍システム上でのM凸関数最小化に適用できるかどうか、検討する。
 - ④ 整数格子点集合のより一般的なクラスを制約とする問題について検討を行う。
- (3) L凸関数の制約付き最小化問題の研究
 - ① 画像処理における各種問題を調査し、応用上考慮すべき制約を把握する。
 - ② L凸関数の制約付き最小化問題の構造を解析し、計算複雑度を調べる。
 - ③ 高い近似精度をもつ高速アルゴリズムを開発する。さらに実際の画像処理の問題に適用し、その有効性を検証する。
- (4) 制約なしのM凸/L凸関数最小化問題に対する既存のアルゴリズムにさらなる改良が可能かどうか、検討を行う。
- (5) 上記の研究の遂行のため、国内外の学会やワークショップに参加し、他の研究者との情報交換を行い、アルゴリズム開発に活用する。

4. 研究成果

具体的な研究テーマとして主に3つの課題を挙げているが、以下のような進展があった。

まず、一つの線形不等式制約（ナップサック制約）の下でのM凹関数最大化問題について検討を行なった。この問題はNP困難という、計算困難な問題であるので、効率的な近似アルゴリズムを提案することが目的である。この問題はナップサック制約の下での劣モジュラ関数最大化問題の特殊ケースであることから、 $(1-1/e)$ 近似（ e は自然対数の底）が可能であることがわかっている。この近似精度を上回るアルゴリズムを構築することが最終的な目的である。そのために、その実現のために、ナップサック制約及びマトロイド制約の下での線形関数最大化問題に対する既存の文献を調査し、それに対する近似アルゴリズムが我々の問題に拡張可能かどうか検討した。その結果、様々な修正を施すことにより、拡張が可能であることがわかってきた。この場合、ラグランジュ緩和という手法を使って得られる緩和問題を解き、その解を利用して近似解を構築する、という手法を提案した。この手法により、任意の近似精度の解が得られる多項式時間近似スキームが存在することを示すことが出来た。

次に、ナップサック制約が複数個でもM凹関数最大化問題に多項式時間スキームが存在するか否かを検討した。制約が1つの場合に用いたラグランジュ緩和の手法は、制約が複数になると適用が難しいことがわかってきた。これに対し、2010年9月にGrandoniとZenklusenが発表した近似解法の技法が我々の問題に適用でき、それにより多項式時間近似スキームが構築出来そうであることがわかってきた。この技法は、元の問題を実数変数に関する連続緩和問題へと緩和し、得られた実数解を利用して近似解を構築するというものである。さらに、離散凸解析の成果を巧みに利用することにより、連続緩和問題が効率的に解けることを示した。これらの成果を組み合わせることで、多項式時間近似スキームを実現した。この結果はアルゴリズム理論に関するレベルの高い査読付き国際会議に採択され、高い評価を得ている。

次に、「近傍システム」と呼ばれる、良い組合せ構造をもつ整数格子点集合についての研究を行なった。組合せ最適化（離散最適化）の分野においてこれまで、様々な「良い組合せ構造」が提案されてきたが、この近傍システムはこれらの概念を特殊ケースとして含む、より一般的な概念である。本年度は近傍システムの構造を詳しく調査すると共に、近傍システム上での分離凸関数最小化について検討を行なった。その結果、既存の「良い組合せ構造」との関係が明らかになるとともに、分離凸関数最小化が効率的に出来ることがわかってきた。この成果についても、アルゴリズムと計算の理論に関する査読付き国際会議に採択された。

さらに、「グラフで表現可能な」効用関数に関する財の配分問題を考え、いくつかの重要なケースに対する近似アルゴリズムを提案した。グラフで表現可能な効用関数は、簡潔な表現をもつため、理論的にも実用的にも有用な効用関数のクラスである。この関数が劣モジュラ及び優モジュラであるための必要十分条件を与えると共に、それぞれの場合において効率的かつ高精度な近似アルゴリズムを構築した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. A. Shioura: Neighbor Systems, Jump Systems, and Bisubmodular Polyhedra, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 26 (2012) 114-144, 査読有
2. A. Shioura, S. Suzuki: Optimal Allocation Problem with Quadratic Utility Functions and Its Relationship with Graph Cut Problem, Journal of Operations Research Society of Japan, 55 (2012) 92-105, 査読有
3. S. Moriguchi, A. Shioura, N. Tsuchimura: M-convex Function Minimization by Continuous Relaxation Approach: Proximity Theorem and Algorithm, SIAM Journal on Optimization, 21 (2011) 633-668, 査読有
4. A. Shioura, M. Yagiura: A Fast Algorithm for Computing a Nearly Equitable Edge Coloring with Balanced Conditions, Journal of Graph Algorithms and Applications, 13 (2010) 391-407, 査読有
5. N. Shakhlevich, A. Shioura, V. Strusevich: Single Machine Scheduling with Controllable Processing Times by Submodular Optimization, International Journal of Foundations of Computer Science, 20 (2009) 247-269, 査読有
6. V. Kolmogorov, A. Shioura: New Algorithms for Convex Cost Tension Problem with Application to Computer Vision, Discrete Optimization, 6 (2009) 378-393, 査読有

[学会発表] (計 7 件)

1. A. Shioura: Computing the Convex

Closure of Discrete Convex Functions, Workshop on Modern Aspects of Submodularity, 2012年3月20日, アトランタ, アメリカ

2. A. Shioura: Polynomial-Time Approximation Scheme for Maximizing Gross Substitutes Utility under Budget Constraints, 19th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2011), 2011年9月5日, ザールブリュッケン, ドイツ
3. A. Shioura: Polynomial-Time Approximation Scheme for Maximizing M_q-concave Functions under Budget Constraints, 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2011年6月1日, 京都大学
4. A. Shioura: Polynomial-Time Approximation Scheme for Maximizing Gross Substitutes Utility under Budget Constraints, NII Shonan Meeting on Graph Algorithms and Combinatorial Optimization, 2011年2月15日, 湘南国際村センター(神奈川県葉山町)
5. A. Shioura: Neighbor Systems, Jump Systems, and Bisubmodular Polyhedra, International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC) 2010, 2010年12月15日, ラマダプラザ済州ホテル(大韓民国済州島)
6. N. Shakhlevich, A. Shioura, V. Strusevich: A Divide-and-Conquer Approach for Polymatroid Optimization with Application to Preemptive Scheduling Problems, 6th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, 2009年5月9日, ブダペスト, ハンガリー
7. N. Shakhlevich, A. Shioura, V. Strusevich: A Decomposition Algorithm for Linear Optimization Over Polymatroids with Applications, 20th International Symposium on Mathematical Programming, 2009年8月25日, シカゴ, アメリカ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塩浦 昭義 (AKIYOSHI SHIOURA)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号: 10296882