

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 5 日現在

機関番号：12102

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740062

研究課題名（和文）単体的複体の部分構造および極小反例に基づく位相幾何学的組合せ論の研究

研究課題名（英文）Topological combinatorics in the view of substructures and minimal counterexamples of simplicial complexes

研究代表者

八森 正泰（HACHIMORI MASAHIRO）

筑波大学・システム情報系・准教授

研究者番号：00344862

研究成果の概要（和文）：

本研究は、単体的複体の組合せ的性質に関して、その部分構造および極小反例についての構造解析を軸に調べることを目的とした。特に、位相幾何学的組合せ論の観点から重要である、shellability, sequential Cohen-Macaulayness, partitionability に関して、頂点集合の制限操作に関する極小反例の性質を調べ、これらが 2 次元以下、または、flag complex の場合には一致することを示した。また、これらの極小反例の pure-skeleton についての考察や、その他応用的な研究も進めた。

研究成果の概要（英文）：

This study aimed analyses of combinatorial properties of simplicial complexes based on the structural analysis of substructures and minimal counterexamples. Especially, we studied shellability, sequential Cohen-Macaulayness, and partitionability, which play important roles in the study of topological combinatorics, and showed the counterexamples for these properties with respect to the restriction of the vertex set coincide for the class of simplicial complexes of dimension at most two, or in the class of flag complexes. We also studied the pure-skeletons of these counterexamples, and also proceeded some related applicational studies.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：単体的複体, shellability, sequentially Cohen-Macaulay, partitonability, obstruction, flag complex, pure-skeleton

1. 研究開始当初の背景

組合せ論において位相幾何学的性質を利用する位相幾何学的組合せ論は、国内ではまだこれを標榜する研究者はあまり多くない状況

であるが、世界的には注目を集めるようになってきて

いる。主として、組合せ論において現れる集

合族や半順序構造に自然に現れる(抽象的)単体的複体の持つ位相幾何学的情報(ホモロジーやホモトピー、オイラー標数やベッチ数など)を利用して組合せ的性質を議論するという研究手法である。このような位相幾何学的組合せ論の今後の更なる展開に向け、位相幾何学と組合せ論の関連をさまざまな面から解き明かしていく必要がある、ということが本研究の一つの背景である。

一方、組合せ論においては、対象物のクラスの中に「マイナー操作」(頂点の除去や同一視など、台集合を小さくする操作)に関する半順序構造を入れ、着目する性質に関して極小な反例の性質を議論することがよく行われており、極値集合論、グラフ理論、組合せ最適化など、さまざまな分野で重要な研究となっている。位相幾何学的組合せ論の展開においても、この視点を取り入れることにより、これまでの位相幾何学的組合せ論の議論の中にはなかった、より組合せ論的な議論を新しく発展させることに位相幾何学的組合せ論における新しい研究の展開の出発点を期待した、ということがもう一つの背景である。

このような背景を踏まえ、本研究では単体的複体の組合せ構造と位相幾何学的性質の関連を、マイナー操作に関する極小な反例の組合せ的構造と位相幾何学的性質の関係から解き明かすことを目指した。

2. 研究の目的

本研究では、多くの位相幾何学的組合せ論の議論で用いられる単体的複体を対象とし、マイナー操作に関して極小な反例がどのようなものであるかを調べることを目的とした。特に、位相幾何学的組合せ論における基礎的な組合せ的性質である shellability や partitionability、また、位相幾何学的性質である sequential Cohen-Macaulayness など

の間で、そうした極小反例にどのような違いがあるのかを明らかにすることを目的とした。そして、そうした極小反例の性質を解き明かしていくことにより、どのような新しい知見が出てくるか、また、その性質を議論するためにはどのような手法が必要になるか、などの議論を通して、位相幾何学的組合せ論に新しい研究の視点を探ることを目的とした。このほか、グラフやマトロイド、ネットワークの応用を視野に入れた研究も目的とした。

3. 研究の方法

まず、研究の出発点としては、マイナー操作としては頂点集合の部分集合への制限を考え、本研究代表者と東京大学の柏原賢二氏の共同研究である、shellability に関する2次元の極小反例(=obstruction)のリストの特定、および、これが sequential Cohen-Macaulayness および partitionability についての極小反例と一致する、という結果を出発点とし、この結果の証明の完成と精密化、また、マイナー操作にリンクを取る操作も加えた場合の議論などを進めた。この過程において、flag complex のクラスにおいてもこれらの極小反例が一致するという考察へも議論を進めることとなった。

さらに、これらの極小反例の pure-skeleton の構造に着目し、その性質の議論を高次元への拡張の手掛かりとした。

また、応用を視野に、確率グラフの指標の期待値やグラフ上のゲームに関する考察も行った。

4. 研究成果

まず、本研究で最初に行った、頂点集合の制限に関する shellability の極小反例のリ

ストの特定という先行研究についての考察から、その証明の精緻化を行い、より簡潔で整理された証明を与えたことが本研究の第一の結果である。また、その過程で、flag complex という単体的複体に対する shellability の極小反例に対する Woodrooffe の結果を利用し、2次元以下の単体的複体というクラスの外、flag complex のクラスについても、極小反例が shellability, sequential Cohen-Macaulayness, partitionability のすべてに対して一致することを示した。これらの3つの性質はそれぞれ2次元以上では異なることが知られており、しかし、極小反例については一致するクラスが複数見つかったことは思いがけない結果である。極小反例に着目するという組合せ的な考え方がこれらの諸性質に強く組合せ的な制約を加えており、これによってこれまでには考えられていなかったような新しい側面が浮かび上がってきているということが示唆される結果である。

また、マイナー操作としてリンクを加えた場合の極小反例 (=strong obstruction) についての考察により、このより強い制約を加えた極小反例に対する議論から、最初に考えていた頂点集合の制限のみをマイナー操作として考えていた際の極小反例についての多くのことが分かることも示した。以上の結果をまとめて1本の論文として公刊した。

次に、shellability の極小反例の pure-skeleton の性質として、最高次元のみ nonshellability が現れるだろう、ということを予想し、これが3次元まで成立することを示した。この証明の過程において、本研究代表者および東京大学の柏原賢二氏の共同研究であった、2次元の単体的複体の任意の制限が shellable なら、その2次元 pure-skeleton は拡張的に shellable である、

という結果を用いたのであるが、この証明をより簡潔に分かりやすく書き換えたことも本研究の結果の1つである。これらの結果は、現在論文化の過程にある。この予想は、今後、上述した3つの性質に関する極小反例に関する研究を高次元に拡張する際に重要な手がかりになると考えており、これが3次元まで成立することが分かったのはこの拡張に向けた重要な第1歩となると考えられる。特に、3次元の極小反例に関しては、本質的には3次元 pure-skeleton の構造がこの極小反例の性質を決定することを含意するというのもこの結果の帰結の1つである。

この他、応用的に将来関係が生じる可能性を念頭に、確率グラフの指標の期待値の表現やグラフ上の離散ボロノイゲームのナッシュ均衡についての研究において、いくつかの小さい成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

Masahiro Hachimori and Kenji Kashiwabara, Obstructions to shellability, partitionability, and sequential Cohen-Macaulayness, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*, 118 (2011), 1608-1623. DOI:10.1016/j.jcta.2011.01.011, 査読有。

[学会発表] (計6件)

- ① 八森正泰, 任意の制限がシェラブルな単体的複体と純骨格, 応用数理学会 2013年研究部会連合発表会, 2013年3月14日-15日, 東洋大学.
- ② 八森正泰, Strong obstructions to

shellability の pure 2-skeleton, 日本数学会 2012 年度年会, 2012 年 3 月 26 日-29 日, 東京理科大学神楽坂キャンパス.

- ③ 八森正泰, 単体的複体の shellability および関連する性質の階層, 日本数学会 2011 年度秋期総合分科会, 2011 年 9 月 28-10 月 1 日, 信州大学松本キャンパス.
- ④ 八森正泰, 3 次元の obstruction to shellability について, 2010 年度応用数合同研究集会, 2010 年 12 月 16-18 日, 龍谷大学.
- ⑤ 八森正泰, Shellability の obstruction に関する予想と strong obstruction, 離散数学とその応用研究集会 2010, 2010 年 7 月 30 日-8 月 2 日, 高知大学.
- ⑥ 八森正泰, 柏原賢二, Flag complex における shellability と関連する性質の obstruction, 第 21 回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2009 年 11 月 26-27 日, 横浜国立大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

八森 正泰 (HACHIMORI MASAHIRO)
筑波大学・システム情報系・准教授
研究者番号 : 00344862