

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 1日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740068

研究課題名（和文）

結晶界面のダイナミクスの数理解析

研究課題名（英文）

Mathematical analysis for interface dynamics of crystal

研究代表者

石渡 哲哉（ISHIWATA TETSUYA）

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：50334917

研究成果の概要（和文）：

本研究では、結晶界面の運動のモデルの一種であるクリスタライン運動のうち、主にバルクからの寄与のあるクリスタライン曲率流、面積保存型クリスタライン曲率流を考え、二次元平面上での解曲線の時間発展途中での挙動について解析を行なった。その結果、時間発展途中での線分の消滅パターンを完全に分類し、また、界面が自己交差を起こさない条件下で、解曲線の変形プロセスを解明した。

研究成果の概要（英文）：

In this research, we consider some crystalline motions: a kind of interface motion of crystal. In particular, we mainly treat 2 types of crystalline motion: crystalline curvature flow with bulk effect and area-preserving crystalline curvature flow. We discuss the behavior of solution curves, not asymptotic behavior, and classify the extinction patterns of a line-segment of the interface completely and obtain the deformation process of solution curve under the conditions for no self-intersection of the interface.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：界面ダイナミクス、結晶界面、曲率流、解の挙動、進行波、非線形現象、数理モデル、

1. 研究開始当初の背景

界面のダイナミクスは、対象となる現象によって様々な量に依存して記述されるが、界面の表面張力効果などが重要な要素になることが多い。この効果は、数学的には曲率に

依存する関係式として表現され、平均曲率流方程式に代表されるように、1980年代中盤以降、曲率依存タイプの運動方程式が内外の研究者らによって精力的に研究されてきた。また、非線形偏微分方程式の特異極限として、そのような運動方程式が導出されることも

あり、この方面での研究も近年精力的に行なわれている。

本研究では様々な界面運動のうち、界面の法線方向の速度がクリスタライン曲率と呼ばれる量に依存する運動を扱う。これらの運動は、クリスタライン運動、あるいは、クリスタライン曲率流等と呼ばれる。この枠組みは J. Taylor(1991)あるいは Angenent and Gurtin(1989)によって提案され、彼らの提案後、儀我氏、石井氏、矢崎氏などの日本人研究者や Belletini 氏などのイタリアのグループが精力的に研究を進めている。この中で、儀我氏らは広いクラスのクリスタライン運動に対して適用可能な等高面法による解の追跡法を構築し、この分野をリードしている。また、矢崎氏は界面が凸折れ線曲線の場合に対して、様々なクリスタライン運動に対する漸近挙動の結果を得ている。Belletini 氏らイタリアのグループは、3次元以上における平均曲率流のクリスタライン版の運動の構築をし、多面体解の面の崩壊現象などの解析を行なっているが、非凸界面の詳細な挙動は現在でも解明されていない。

この中で、報告者は2次元クリスタライン運動のうち、界面の法線方向の速度がクリスタライン曲率の正冪に比例する比較的単純なモデル方程式を扱い、幾つかの条件下で非凸界面の変形プロセスを分類する研究を終えたところであった。研究期間が始まる当初、曲率以外の効果であるバルクからの効果や、面積保存性といった非局所的効果が入ったモデルに対する非凸界面に対する詳細な結果はまだなされていなかった。

2. 研究の目的

本研究で扱うモデルは主に次の2つとする：

(1) $V_j(t) = U - H_j(t)$ とこの一般化

(2) $V_j(t) = \bar{H}(t) - H_j(t)$ とこの一般化

ここで、 V_j は界面の第j番目の辺(ファセット, facet)の外向き法線速度、 U はバルクの効果を表す定数、 H_j は第j番目の辺のクリスタライン曲率、 \bar{H} は全表面での曲率の平均値を表す。また、解曲線はクリスタライン曲率を自然に定義できる許容多角形と呼ばれる多角形の範疇で考えることとする。

(1)のモデルは、Angenent と Gurtin らによって与えられたモデルであり、バルクからの寄与がある結晶界面の運動モデルである。(2)は、面積保存の拘束条件下での表面エネルギー

ギーの勾配流となっており、例えば、負結晶の界面の運動モデルと考えることができる。

これまで、上の2つの運動については、初期界面が有界かつ凸の場合については漸近挙動などが詳しく調べられているが、初期界面が非凸の場合は、(1)については比較原理などの結果を除き、分かっていない。また、V字解など界面が非有界な場合については、重み付曲率流の解の極限として(1)のV字解が得られる、という結果以外知られておらず、そのような特殊解以外の場合についての考察はなされていない。

よって、本研究では、上の運動に対し、初期界面が非凸、非有界の場合を考え、解の挙動を明らかにすることを目的とする。特に、時間発展途中における解図形の幾何学的特徴の変化について考察し、

- ・ 解曲線の凸凹の変化のパターン
- ・ 穴形成、分裂などの解曲線のトポロジー変化の条件

を明らかにすることを具体的目的とする。

3. 研究の方法

研究は、各モデルについて下の三段階で行なう。

(1) 界面のトポロジー変化が起きない条件を明らかにする。

(2) (1)の条件下での解曲線の変形パターンを分類する。

(3) トポロジー変化が起きる場合の特異性の分類を行なう。

これらについて、理論的考察と数値実験による考察を相補的に行なう。

また、関連する界面運動の理論的研究および数値的研究を行なっている研究者らとの議論を効果的に行なう。

4. 研究成果

主な成果は以下の通りである。

(M1) に対して：

界面が閉曲線の場合を考える。このとき、初期界面が非凸の場合に、比較定理を証明し、優解および劣解を構成することで、解の挙動の大枠を与えた。また、初期界面の各ファセ

ット（界面の中のフラットな部分、線分）に対する回転角度に関する条件のもと、界面が自己交差しないことを示した。また、有限時間で曲率が0の辺が局所的には最大2個消滅し、解曲線が有限時間で凸になることを示した。

界面が非有界である場合を考える。特に、解曲線の両端のファセットが無限長を持っている場合を考え、V字定常進行波解の一意存在の必要十分条件を明らかにした。また、V字解の大域存在を示した。更に、非V字解がある種の条件下で有限時間にV字解になることを示した。非有界な解の解析は、単純にそれを囲む比較界面を構成することができないため、界面が閉曲線のときのような単純な順序保存性の利用ができない。V字定常進行波およびその他の特殊解を組み合わせることで利用することにより、ファセットの挙動のコントロールを行なった。更に一部の結果は、本質的許容多角形と呼ばれるより広い界面のクラスに拡張することができた。

また、(M1)の運動の一種として、スパイラル結晶成長に現れる界面運動のクリスタライン版を考えた。界面は、運動する先端を1つもつ無限長の多角形曲線とし、先端以外は、BCF理論からの類推で(M1)による運動をしていると仮定し、境界条件として先端の運動を与えた場合の、解の大域存在性等について調べた。現在の所、先端の運動についてのある種の条件下、解曲線の自己交差が起きないことが分かり、スパイラル状の解曲線の時間大域存在が示された。

(M2) に対して：

初期界面の各ファセットのクリスタライン曲率が非負の場合について考察を進めた。(M2)では比較定理が成立しないため、各ファセットの挙動の評価が(M1)の場合に比べ難しくなるが、総表面エネルギーの時間に関する非増加性等の評価を組み合わせる事により、正の曲率を持つファセットの消滅は起らず、零曲率を持つファセットがすべて有限時間で消滅することが分かった。これにより、有限時間で解曲線は凸となり、S. Yazakiによる既存の結果により、時間無限大でウルフ図形の相似形に収束することが分かった。

今後の展望

(M1)の場合、解析で課した条件を満たさない場合、界面同士の接触により有限時間で穴を形成する場面があることが分かったが、その場合の解の延長についてはまだ未解決である。この場合、特異点をもつ初期図形から

の解の構成が必要になる。近年、 $V_j = -H_j$ の場合に、比較原理を用いてそのような解が存在することが調べられているが、一意性は未解決であり、また、より広いクラスへの同手法の適用はこれからである。また、比較原理を用いているため、(M2)などのように順序保存性を持たないモデルについては、新しいブレークスルーが必要となる。これらは今後の課題である。

また、期間中に新たに推進したスパイラル結晶成長モデルについては、現実の結晶成長と比較して、界面先端の運動の与え方に議論の余地が残っている。今後、結晶物理研究者および実験研究者らとの議論を行ない、モデルの整備を行なう予定である。

(M2)の場合、初期界面が凸図形に近い条件下での解析しか進められなかったため、今後、より広い初期界面に対する解析を行なう。また、本研究期間中は mobility に異方性のあるモデルは全く扱わなかった。今後そのような運動についても考察を進める必要がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① Motion of essentially admissible V-shaped polygonal curves governed by generalized crystalline motion with a driving force, T. Ishiwata, Journal of Math-for-Industry Vol. 3 (2011) 21-25
URL:<http://gcoe-mi.jp/english/temp/publish/098d0a97160e4eacbdcf54542c293c3.pdf>

② Asymptotic behavior of blow-up solutions to a degenerate parabolic equation, K. Anada and T. Ishiwata, Journal of Math-for-Industry Vol. 3 (2011) 1-8
URL:<http://gcoe-mi.jp/english/temp/publish/b381507677a68af7d14357dba61a72a4.pdf>

③ Motion of polygonal curved fronts by crystalline motion: V-shaped solutions and eventual monotonicity, T. Ishiwata, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement 2011, Volume 1, 717-726
URL:なし(冊子のみ)

④ On the motion of polygonal curves with asymptotic lines by crystalline curvature

flow with bulk effect, T. Ishiwata, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S, vol.4, no.4, 2011, 865-873
URL:<http://aimsciences.org/journals/displayArticles.jsp?paperID=5705>

[学会発表] (計 14 件)

① T. Ishiwata, Behavior of polygonal curves by crystalline curvature flow, Dutch - Japanese Workshop, Analysis of non-equilibrium evolution problems: selected topics in material and life sciences, Eindhoven University of Technology, Netherlands, November 8, 2011

② T. Ishiwata, Behavior of Polygonal Curves by Crystalline Curvature Flow, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Dept of Math and Center of PDE, East China Normal University, 上海, November 3, 2011

③ T. Ishiwata, Crystalline motion and eventual monotonicity of the shape, The 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Vancouver Convention Centre, Vancouver, BC, Canada, July 19, 2011

④ T. Ishiwata, Behavior of polygonal curves by crystalline curvature flow with a driving force, East Asia section of SIAM 2011, Waseda Univ. Kita-Kyushu campus, June 29, 2011.

⑤ T. Ishiwata, Motion of non-closed planar polygonal curves by crystalline curvature flow with a driving force, Poster presentation, Far-From-Equilibrium Dynamics 2011, January 4-8, 2011, RIMS(flush talk, 2010.1.5)+Shiran kaikan(2010.1.6), Kyoto, Japan

⑥ 石渡 哲哉, Motion of non-closed planar polygonal curves by crystalline motion, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学 瀬田キャンパス, 2010年12月17日

⑦ T. Ishiwata, Crystalline motion and eventual monotonicity of the shape, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics, August 30, 2010, Czech Technical University, Prague, Czech Republic

⑧ T. Ishiwata, Motion of polygonal curved

fronts by crystalline motion: V-shaped solutions and eventual monotonicity, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, May 26, 2010, Dresden University of Technology, Dresden, Germany

⑨ T. Ishiwata, On the motion of polygonal curves by crystalline curvature flow with bulk effect, 1st Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, June 16, 2009, Tohoku University, Sendai, Japan

他 5 件

[図書] (計 0-件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 哲哉 (ISHIWATA TETSUYA)

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号 : 50334917

(2) 研究分担者

なし ()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

なし ()

研究者番号：