

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 9 日現在

機関番号：14602

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21740075

研究課題名（和文） 確率モデルによる、フラクタルの新たな分類を目指して

研究課題名（英文） New classification of fractals by probabilistic models

研究代表者 篠田 正人（SHINODA MASATO）

奈良女子大学・理学部・准教授

研究者番号：50271044

研究成果の概要（和文）：

フラクタルグラフにおける浸透過程およびランダムな全域木モデルを構成しその性質を調べた。特に重要な性質として、ランダムな一様全域木モデルと最小全域木モデルではその極限過程において臨界指数が異なることを示した。

研究成果の概要（英文）：

We constructed some percolation models and random minimal spanning tree models on fractal-like graphs and studied some properties of these probabilistic models. Especially we showed that there is a difference of critical values between minimal spanning trees and uniform spanning trees.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：フラクタル、確率モデル、統計力学、相転移、確率ゲーム

## 1. 研究開始当初の背景

統計力学に関する確率モデルの研究はここ数十年の間で非常に盛んになり、大きく発展している。格子気体の流体力学極限やイジングモデルなど、偏微分方程式や可積分系などの分野とも関連する重要な問題と認識さ

れている。本研究代表者はこれまでにこうした確率モデルの一つであるパーコレーション（浸透過程）について精力的に研究しており、これまでの研究で特にフラクタルグラフを扱ったのは、統計力学における繰り込み群やスケールリング則を考えるにはグラフの平行移動不変性よりも自己相似性が重要だと

考えたからである。2004年～2006年にかけて科研費若手研究(B)に採択されていた「フラクタルグラフでのパーコレーション相転移現象の研究」では「平行移動不変性を持たないグラフ」においてどのような相転移現象が生じているかを調べ、シェルピンスキーカーペットと呼ばれるフラクタルグラフでは一般の2次元正方格子では相転移の存在・非存在に関して大きく異なる特徴を持つことがわかった。フラクタルでは平行移動不変性を欠くことにより2次元格子と比較して解析が困難ではあるが、相転移点の一意性(樋口・Wu, 2006)や無限クラスターの一意性(竹居・Keane, 2006)など2次元正方格子と共通する性質(言ってみれば、あまり突飛でない性質)も確認されている。

これらの研究から、より一般のグラフを設定し、そのグラフの持つ性質がパーコレーションモデルの相転移現象にどのように反映されるかを考えることが重要かつ興味を惹く問題であると考えた。パーコレーションとグラフの性質との関係という観点は、10年ほど前からHaggstromらによってある種の有限生成群に対応するグラフでの確率モデルの相転移現象と群の性質を結びつける、という研究が盛んに行われている。こうした研究は、いわば相転移現象という統計力学の問題の数学的興味への一般化、と言ってもよい。

本研究計画では、パーコレーションに代表される統計力学の確率モデルを用いたフラクタルの特徴づけを行いたいと考えた。フラクタル格子はシェルピンスキーガスケットのような「有限分離性」を持つものとシェルピンスキーカーペットのような「無限分離性」を持つものに大別できる。より細かい分類にはハウスドルフ次元やスペクトル次元といった諸量が用いられることもある。本研究計画では、主にパーコレーションの観点か

らのフラクタルの分類を行おうとし、そのために等周次元といった幾何的性質、相転移現象といった統計力学的性質がフラクタルの基本構造とどのようにつながっているかを明らかにしたいと考えた。

フラクタルが注目されるようになって数十年が経ち様々な成果が得られているがまだまだわかっていないことは多い。ひとくちにフラクタルと言ってもものによって性質の違いも共通点もあり、特にシェルピンスキーカーペットのような「有限分離性を持たない」フラクタルについては解析の難しさがあって知りたいことが多く残っている。こうしたフラクタル研究に少しでも寄与したいと考え、新たな視点からのアプローチを考えることとした。

## 2. 研究の目的

3年に設定した研究期間において明らかにする点は以下のとおりであった。

(1)パーコレーションによる3次元以上を含めた一般化シェルピンスキーカーペットの分類。

前項で述べた基本構造を持つシェルピンスキーカーペットは3次元以上にも拡張して構成される。そのグラフにおいてのパーコレーション相転移現象を調べ、より広い範囲での分類を完成させる。

(2)非自明な相転移現象の有無と等周次元との関係。

グラフの等周次元が真に1より大きければ非自明な相転移が存在する、という予想がなされている(Benjamini-Schramm, 1996)。この予想を解決したいと考えている。グラフの等周次元の値を求めることは一般には簡単ではないが、フラクタルグラフにおいては比較的計算しやすいので、まずフラクタルグラフで示し、一般論へと展開する。

(3)フラクタルグラフにおけるイジングモデルなどの多様な統計力学モデルの研究。

フラクタルグラフにおける様々な統計力学モデルを導入し、それぞれの特性を活かしたフラクタルの特徴づけを行う。

(4) こうした(1)~(3)の研究において考え出された手法が他の確率モデルに応用できることも考えられるため、そうした発展的研究をも行う。

本計画は統計力学的観点からフラクタルの新たな一面を浮かび上がらせると同時に、組合せ論・確率論・グラフ理論の橋渡しとなる研究をも目指し、従来の確率論研究の範囲にこだわらず、広く離散数学的方法を積極的に導入することでの統計力学モデルの新しい解析方法の発見、および逆に確率論的手法の導入によるグラフ理論の発展生み出したい、と考えた。

### 3. 研究の方法

まず研究代表者のこれまでの研究を精密化し、一般化シェルピンスキーカーペットの分類を行った。また、様々なフラクタル格子について、具体的に数値計算を行いどのような「臨界現象が起こっているか」のシミュレーションを行った。こうした研究を進める過程でフラクタル上のランダムな全域木モデルの重要性を知り、一様全域木モデルと最小全域木モデルについて計算を進めた。こうした計算においては離散数学的手法が特に重要でなった。この研究に際しては、グラフ理論や組合せ論の研究者とも密に連絡を取り情報提供を受け、また討論をしつつ研究を進めるために確率論以外の分野の研究集会にも積極的に参加した。こうした研究交流により確率ゲームに再帰性を持つ漸化式の計算技術が使える問題があることがわかり、数理論ゲームの研究を並行して行うこととした。

### 4. 研究成果

3年間の研究期間で、主に下記の4点について成果を得た。

(1) フラクタル格子上の浸透過程において、自明でない相転移が生じるかどうかのよい十分条件を得て、その条件とグラフの等周次元が深い関係にあることを示した。

研究計画の(1)(2)に対応する結果であり、研究論文としてまとめた。「等周次元が1より真に大きいことが非自明な相転移を導く」という Benjamini-Schramm の問題の解決までは至らなかったが、一般化されたシェルピンスキーカーペットのクラスではこの命題が正しいことを確認した。また、浸透の方向に一部制限のあるグラフでのパーコレーションにおいて非自明な相転移が存在しないような新たな例を挙げその性質を証明した。

(2) シェルピンスキーガスケツト格子におけるランダムな最小全域木モデルと一様全域木モデルを構成し、それぞれの極限確率過程に現れる臨界指数が異なることを示した。

研究計画(3)に対応する。有限グラフにおいてランダムに全域木を選ぶ確率モデルはループ除去ランダムウォークやパーコレーションと深い関係があることが知られている。2次元および3次元シェルピンスキーガスケツト格子で一様全域木モデルを構成し、その連続極限として得られる確率過程の平均2乗距離の臨界指数がランダムウォークや従来の非交叉ウォークとも違うものができることがわかった。

表にそれぞれの指数を掲げる。下線を付した部分が本研究で得られたものである。この成果は Teufel 氏、Wagner 氏との共著論文として

公表予定である。

	$z^2$	Sierpinski gasket	3D Sierpinski gasket
Random Walk	0.5	0.430...	0.386...
Self-Avoiding Walk	0.75 (conj.)	0.798... (Hattori-Kusuoka)	0.674... (Hattori-Kusuoka)
Loop-Erased Random Walk	0.8 (Kenyon)	<u>0.837...</u>	<u>0.737...</u>

表 平均2乗距離の臨界指数

また、最小全域木モデルで同様に連続極限として得られる確率過程の平均2乗距離の臨界指数は、一様全域木モデルに比してわずかに小さくなることがわかった。これは最小全域木モデルの構造が一様全域木よりもわずかに高いフラクタル次元を有することを示している。

(3) フラクタル格子上的浸透過程の臨界確率に関する上からの評価について計算が容易な方法を提案し、実際に新たな評価値を得た。

シェルピンスキーカーペット格子におけるボンドパーコレーションの臨界確率については、以前その上界の評価値が 0.92 であることを示していたが (Shinoda 2002)、グラフの横断確率から得られる評価式を用いて今回新たにその上界値を 0.7 まで更新した。まだシミュレーションで得られる推測値 0.56 には及ばないが、非常にシンプルで計算機による数値計算に向いている手法であり、フラクタル格子に限らず多くの平面格子でのパーコレーション臨界確率のよりよい評価値が得られると考えられる。特に2次元正方格子でのサイトパーコレーションの評価は重要な問題であるものの 0.679 程度の上界値しか知られていないが、本手法を用い大規

模な計算を行えば更新が可能と考えている。

(4) 再帰構造を持つ漸化式の計算手法を応用することで、ランダムな要因を含む数理ゲームの戦略に関する結果を得た。

研究計画(4)に対応する。研究成果(2)で述べたランダムな全域木モデルの計算においては、非対称な連立漸化式を具体的に計算して解くことで臨界指数の値を求めることができた。こうした計算手法を AB Game という確率ゲームに応用し、最適戦略(厳密解)を得た。この結果は場合の数の非常に大きくコンピュータでの戦略の決定が難しい問題を解いたことになり、将来コンピュータによる戦略探索アルゴリズムの有用性の評価にも役立つものと考えられる。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計3件)

① 篠田正人、3\*N AB game の最適戦略、情報処理学会論文誌ジャーナル 53 巻 6 号、査読有、2012、p.1-6

② M. SHINODA、Existence of phase transition of percolation on Sierpinski carpet lattices, COE Lecture Note Series (Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University)、査読無、Vol. 39、2012、p.12-21

[学会発表] (計4件)

① M. SHINODA、Existence of phase transition of percolation on fractal lattices、Multiscale Mathematics: Hierarchy of Collective Phenomena and Interrelations between Hierarchical Structures、2011年12月9日、Kyushu University

② M. SHINODA、Random spanning trees on the Sierpinski gasket、34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications、2010年9月10日、Senri Life Science Center Building

③ 篠田正人、Uniform spanning trees and loop-erased random walks on the pre-Sierpinski gasket、日本数学会、2009年9月24日、大阪大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

篠田 正人 (SHINODA MASATO)

奈良女子大学・理学部・准教授

研究者番号：50271044