

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月18日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740076

研究課題名（和文） ランダムな係数を持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の漸近問題

研究課題名（英文） Asymptotic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with random coefficients

研究代表者

市原 直幸（ICHIHARA NAOYUKI）

広島大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：70452563

研究成果の概要（和文）：

本研究では、確率最適制御問題に現れる粘性ハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式を取り扱った。具体的には、解が長時間経過後にどのような挙動を示すのかを確率論と偏微分方程式の手法を用いて考察した。その結果、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解はある定常状態に近づくことがわかった。さらに、その定常状態をエルゴード型確率最適制御問題の言葉で特徴づけることができた。

研究成果の概要（英文）：

In this research, we dealt with a class of nonlinear partial differential equations, called viscous Hamilton-Jacobi equations, which appear in stochastic optimal control problems. More specifically, we investigated the long-time behavior of solutions by both analytical and probabilistic approaches. It turned out that solutions converge to a steady state as time tends to infinity. We also succeeded in characterizing such steady state in terms of ergodic stochastic control problems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率制御，粘性ハミルトン・ヤコビ方程式

## 1. 研究開始当初の背景

1階のハミルトン・ヤコビ方程式に対する解の長時間挙動に関しては、これまでに詳細な研究がなされているのに対して、確率最適制御から導出される2階の粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動に関しては特殊な場合を除いて体系的な研究があまり進んでいなかった。

## 2. 研究の目的

そこで本研究では、粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の解の長時間挙動を解明することを目的とした。特に、係数にランダム項を含む場合も視野に入れた上で、係数の性質が解の漸近挙動にどのような影響を与えるのかを解明することを大きな目標とした。

### 3. 研究の方法

証明では、確率論と偏微分方程式論を組み合わせた手法を用いた。具体的には、対象とする粘性ハミルトン・ヤコビ方程式の背後にある確率制御問題を考え、この問題の最適制御過程のエルゴード性（正再帰性）を調べることで、目的の偏微分方程式の解の定常状態への収束を証明した。

### 4. 研究成果

本研究の成果として、大きく分けて以下の2つの結果を得ることができた。

(1) 定常状態を記述するエルゴード型ベルマン方程式の解が存在するための必要十分条件を求め、ある特別な場合には適当な同一視の下で解の一意性が成立することを示した。さらに、この解から自然に定まる拡散過程がエルゴード（正再帰）的となるための必要十分条件を、エルゴード型ベルマン方程式の解の定性的な性質で特徴づけた。この結果の証明には、ハミルトニアン $H$ の狭義凸性のみが本質的であることが分かった。これにより、これまであまり調べられてこなかった2次以上の増大度を持つハミルトニアンに対しても本研究の結果が適用できるなど、様々なタイプの方程式を統一的に取り扱うことが可能になった。証明は古くからよく知られているリヤプノフの方法に基づくものだが、ハミルトニアン $H$ の凸性をうまく利用することで適切なリヤプノフ関数が具体的に構成できることを示し、証明自体も簡潔かつ見通しの良いものに改良することができた。

(2) 粘性ハミルトン・ヤコビ方程式のうち、ハミルトニアンがグラジエント変数に関して優線形増大かつ空間変数に関して多項式増大となる場合について、初期値問題の解がエルゴード型ベルマン方程式の解に収束することを証明した。この定理を証明するために、まず定常状態を記述するエルゴード型ベルマン方程式の解の増大度に関する精密な評価式を導出した。これにより、解の増大度とハミルトニアン $H$ のグラジエント変数に関する増大度の関連性を定量的に理解することが可能になり、解の時間無限大での収束を証明することができた。さらに、極限として現れる関数をエルゴード型確率制御問題の値関数と最適制御の言葉で特徴付けることができた。

今後の展望としては、より複雑な係数を持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に対する解の長時間挙動を考察することが挙げられる。特に、ランダムな係数を持つ場合は本研究においても解明し尽くせなかった点が多いので、本研究を足掛かりに研究を発展させていく予定である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

1. Naoyuki Ichihara, Large time asymptotic problems for optimal stochastic control with superlinear cost, Stochastic Processes and their Applications 122(4), pp.1248-1275, (2012), DOI:10.1016/j.spa.2011.12.005 (査読有)
2. Naoyuki Ichihara, Recurrence and transience of optimal feedback processes associated with Bellman equations of ergodic type, SIAM Journal on Control and Optimization 49(5), pp.1938-1960 (2011), DOI:10.1137/090772678 (査読有)
3. Naoyuki Ichihara, Long-time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex and coercive Hamiltonians, 京都大学数理解析研究所講究録 1651, pp.137-160 (2009) (査読無) URL: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kyuroku/contents/pdf/1651-12.pdf>

[学会発表] (計32件)

1. Naoyuki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, Probability seminar, National Central University, Taiwan. (2012/03/21)
2. Naoyuki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, Probability seminar, National Chiao Tung University, Taiwan. (2012/03/19)
3. Naoyuki Ichihara, Large time asymptotic problems for stochastic optimal control, Mathematical physics and Stochastic analysis, Shonan village center, Kanagawa. (2012/03/14)
4. Naoyuki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, CREST and 4th Ritsumeikan-Florence Workshop on Risk, Simulation and Related Topics, Ritsumeikan Asia Pacific University, Beppu. (2012/03/08)
5. Naoyuki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, 13th Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Waseda University, Tokyo. (2012/03/05)
6. Naoyuki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman

equations with superlinear nonlinearity in gradients, Seminaire d'analyse appliquee, Universite de Bretagne Occidentale, Brest, France. (2012/02/21)

7. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, Analysis seminar, Kobe university, Kobe. (2012/02/09)

8. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, Dynamical Optimization in PDE and Geometry, Universite Bordeaux 1, Bordeaux, France. (2011/12/19)

9. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with superlinear nonlinearity in gradients, Osaka probability seminar, Osaka University. (2011/10/18)

10. Naoyki Ichihara, Large time asymptotic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations, MSJ meeting 2011, Shinshu University. (2011/09/29)

11. Naoyki Ichihara, Large time asymptotic problems for some optimal stochastic control and associated partial differential equations, Hiroshima Applied Analysis seminar (16th), Hiroshima Univeristy. (2011/08/31)

12. Naoyki Ichihara, Large time asymptotic problems for optimal stochastic control with superlinear cost, Kyusyu probability seminar, Kyusyu Univeristy. (2011/07/08)

13. Naoyki Ichihara, Large time asymptotic problems for some stochastic control, Tokyo probability seminar, Tokyo Institute of Technology. (2011/06/06)

14. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients, Journee a Tours, Universite de Tours, Tours, France. (2011/03/02)

15. Naoyki Ichihara, On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Okayama Probability and Analysis seminar, Okayama University. (2011/02/18)

16. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients, Probability seminar, National ChiaoTung University, Taiwan. (2010/11/25)

17. Naoyki Ichihara, Optimal control theory and partial differential equations,

Colloquium at Department of Mathematics, National Central University, Taiwan. (2010/10/21)

18. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients, Probability seminar, Academia Sinica, Taiwan. (2010/09/27)

19. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients, SPA 2010 Osaka, Senri Life Science Center, Osaka. (2010/09/06)

20. Naoyki Ichihara, Probability theory and nonlinear partial differential equations, Probability YSS 2010, Grampus inn Shirahama, Wakayama. (2010/08/18)

21. Naoyki Ichihara, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations with quadratic nonlinearity in gradients, Symposium "Viscosity methods and nonlinear PDE", Hokkaido University. (2010/07/23)

22. Naoyki Ichihara, On the large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, MSJ meeting 2010, Keio University. (2010/03/25)

23. Naoyki Ichihara, Viscous Hamilton-Jacobi equations and associated diffusion processes, Seminaire d'analyse numeruque, Universite de Rennes 1, Rennes, France. (2010/02/18)

24. Naoyki Ichihara, Viscous Hamilton-Jacobi equations and associated diffusion processes, Seminaire d'analyse appliquee, Universite de Bretagne Occidentale, Brest, France. (2010/02/16)

25. Naoyki Ichihara, On the ergodic problem for viscous Hamilton-Jacobi equations, Fukae Workshop on Differential Equations, Kobe University. (2010/01/22)

26. Naoyki Ichihara, On the ergodic problem for viscous Hamilton-Jacobi equations, Stochastic Problems and Nonlinear PDEs, Kyoto University. (2009/11/30)

27. Naoyki Ichihara, Recurrence and transience of diffusion processes associated with Bellman equations of ergodic type, One day seminar "Finance, Stochastics and Asymptotic analysis", Osaka University. (2009/11/28)

28. Naoyki Ichihara, Recurrence and transience of diffusion processes associated with nonlinear differential equations, Probability seminar, National ChiaoTung

University, Taiwan. (2009/11/11)

29. Naoyki Ichihara, Recurrence and transience of optimal feedback processes associated with Bellman equations of ergodic type, Probability seminar, Institute of Mathematics, Academia Sinica. China (2009/11/02)

30. Naoyki Ichihara, On the recurrence of diffusion processes associated with viscous Hamilton-Jacobi equations, Kansai probability seminar, Kyoto University. (2009/10/16)

31. Naoyki Ichihara, On the recurrence of diffusion processes associated with viscous Hamilton-Jacobi equations, Markov processes and stochastic analysis, Okayama University. (2009/10/10)

32. Naoyki Ichihara, On the ergodic problem for viscous Hamilton-Jacobi equations, MSJ meeting 2009, Osaka University. (2009/09/25)

[その他]

ホームページ等

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/~naoyuki/index.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

市原 直幸 (ICHIHARA NAUYUKI)

広島大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：70452563