**様式 C-19**

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年６月１４日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２００９　～　２０１０
課題番号：２１７４００８５
研究課題名（和文）　新しいグラフ彩色アプローチによるBH予想への挑戦

研究課題名（英文）　New colored graphs towards a Brualdi-Hollingsworth conjecture

研究代表者
　鈴木　一弘（SUZUKI KAZUHIRO）
　神奈川大学・工学部・助手
　研究者番号：５０５１４４１０

研究成果の概要（和文）:
BH 予想とは「2n-1 色で辺彩色された 2n(≧6)頂点完全グラフの辺集合は辺素な n 個の異色全域木に分解できる」というものである。本研究では、異色グラフを一般化した f-異色グラフを定義し BH 予想を拡張することで、関数 f に応じた段階的な研究を可能とし、特に f(c)=n-2 の時に拡張 BH 予想が正しいことを証明した。また、w 成分 f-異色全域林が存在するための必要十分条件を証明し、それを応用して既存の２つの定理を一般化した。

研究成果の概要（英文）:
Brualdi et al. conjectured that a properly edge-colored complete graph of order 2n(>5) with 2n-1 colors can be decomposed into n edge-disjoint heterochromatic spanning trees. We generalized this conjecture by defining an f-chromatic graph, by which we can study stepwise the conjecture. In particular, we proved the generalized conjecture with f(c)=n-2. Moreover, we proved a necessary and sufficient condition for existence of an f-chromatic spanning forest with exactly w components, and generalized two previous results by applying the condition.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００９年度 | 1,800,000 | 540,000 | 2,340,000 |
| ２０１０年度 | 1,600,000 | 480,000 | 2,080,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：離散数学、グラフ理論

１．研究開始当初の背景

グラフ着色分野は、地図を４色で塗り分ける「４色問題」や、６人集まれば互いに知り合いの３人組、もしくは互いに見ず知らずの３人組が作れるという「ラムゼー問題」を筆頭に、古くから世界中で数学者のみならず一般の人達からも興味を集めている分野である。

例えば、上記の「ラムゼー問題」は、６人を６個の頂点で表現し、頂点同士が知り合いならば赤辺でつなぎ、そうでなければ青辺でつないだ時、そのグラフには赤い三角形か青い三角形があるか？という辺着色問題として考えることができる。同様に、三角形に限らずサイクルやパスや木など様々な単色部分グラフの存在が研究されている。

単色グラフとは、「全ての辺の色が同じ」グラフのことである。一方、単色の逆、即ち「全ての辺の色が異なる」グラフの存在を調べる研究がここ十数年の間で流行を見せている。「全ての辺の色が異なる」グラフのことを異色グラフという。1996 年に Brualdi と Hollingsworth は完全グラフにおける異色全域木の存在に関する次の予想を発表した。

ＢＨ予想［Brualdi and Hollingsworth, 1996, JCTB］

2n-1 色で辺彩色された２ｎ(≧6)頂点完全グラフの辺集合は、辺素なｎ個の異色全域木に分解することができる。

ここで、辺彩色とは隣接する辺同士、即ち共通の端点を持つ辺同士の色が異なるように辺着色することを言う。言い換えれば、どの頂点に注目してもその頂点に接続している全ての辺の色が異なるように辺着色することである。図１に６頂点完全グラフの分解例を示す。

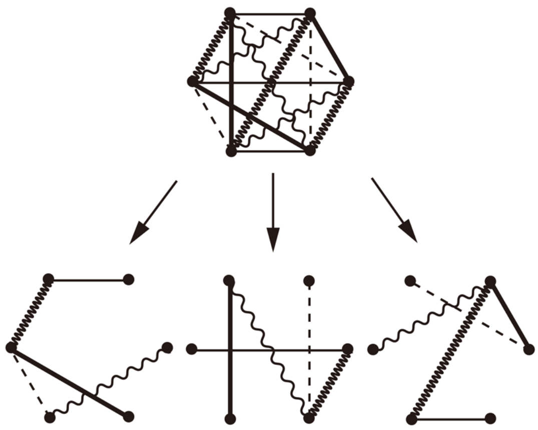


**図　1　BH 予想（2n=6 の場合の例）**

Brualdi らは同論文の中で、２個の異色全域木の存在を証明している。これに対して申請者は、色数条件を取り除いて一般化した次の予想を発表した。

予想［Suzuki, 2006, Graphs Combin.］

辺彩色された２ｎ(≧6)頂点完全グラフの辺集合は、辺素なｎ個の異色全域木に分解することができる。

この一般化によって２個の異色全域木の存在を数学的帰納法で容易に証明できることが分かっている。さらに申請者らは同様に３個の存在を証明したが、２個の時とは違い、証明は長く複雑であり、４個以上の存在を同じ方針で証明することは難しいと思われる。以上の背景から、これまではｎ個に分解するどころか４個以上の存在を示すことですら容易ではなく、ＢＨ予想の解決のめどは全く立っていなかった。

一方で、2006 年に申請者は、完全グラフに限らない一般のグラフに異色全域木が１個以上存在するための必要十分条件を証明した［Suzuki, 2006, Graphs Combin.］。最近になって、その証明法が実は異色全域木に限らず、より一般的な着色全域木の存在についても有効であることに気づき、異色グラフを一般化するという着想に至った。そして 2008 年７月のワークショップで次の新定義を発表した。

定義：f-異色グラフ

異色グラフとは、言い換えればどの色も高々１本しか許されないようなグラフのことである。そこで、各色ごとに許容できる本数を関数ｆ：色集合→非負整数集合によって指定し、どの色ｃも高々f(c)本しかないようなグラフとして一般化したものを f-異色グラフと呼ぶ。

任意の色ｃに対して f(c)=1 の時、f-異色グラフは従来の異色グラフを意味する。

図２に f-異色全域木の例を示す。色集合={1,2,3,4,5,6,7}とし、f(1)=3、f(2)=1、f(3)=3、f(4)=0、f(5)=0、f(6)=1、f(7)=2 とすると、このグラフには、どの色ｃも f(c)本以下であるような全域木が存在する。

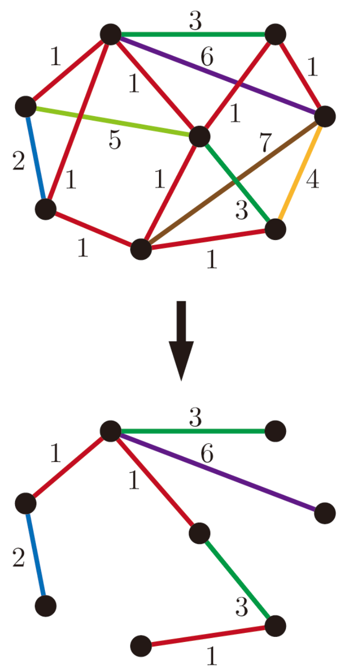




**図　2　f-異色全域木**

２．研究の目的
本研究では、まずＢＨ予想を次のように一般化する。

拡張ＢＨ予想

f-辺彩色されたｎ(≧5)頂点完全グラフには辺素な n/2（の切り下げ）個の f-異色全域木が存在する。特に n=2k の時はその辺集合を辺素な k 個の f-異色全域木に分解できる。

ここで、f-辺彩色とは、どの頂点にも高々f(c)本しか色 c の辺が接続していないように辺着色することを言う。
この新しい予想と f-異色部分グラフについて主に以下の２つを研究課題とする。

(1) f の条件を様々に変えることで、例えば f(c) = n-a や n/2 などとして各色の許容できる本数を f(c)=1 よりも緩めることによって証明の難易度を落とし、予想を部分的に解決する。

(2) 従来の異色部分グラフに関する定理を f-異色部分グラフの問題として再考し、既存の定理を拡張する。

３．研究の方法
(1) f(c)=n-2 として拡張 BH 予想の証明を数学的帰納法によって試みた。

(2) 2006 年に示された異色全域木の必要十分条件を f-異色全域林が存在するための必要十分条件に一般化した。それを応用して、既存の異色全域木の定理を拡張することを試みた。

(3)辺着色グラフに関連した応用研究として、情報漏えい経路分析を数学的に研究するために、情報の読み書きに対するアクセス制御構造を２色辺着色有向グラフでモデル化した。

４．研究成果
まず、本研究成果の概要と学術的意義について述べる。
本研究では、異色グラフを一般化した f-異色グラフを定義し BH 予想を拡張することで、関数 f に応じた段階的な研究を可能とした。即ち、異色全域木の「どの色も高々１本まで」という非常に強い制限を、関数 f を用いて柔軟に設定できるようにすることで、弱い本数制限から徐々に強くしていくという段階的な解決を図るという手法によって BH 予想の研究に進展を与えた。
ＢＨ予想の進展が期待できるだけにとどまらず、既存の異色部分グラフの問題が全て f-異色部分グラフの問題に刷新でき、それら全ての問題において、関数 f の条件による段階的な研究ができるようになり、新たな着色分野として開拓されていくことが期待される。
これは、過去に 1-因子（完全マッチング）から始まった因子研究分野が f-因子という新定義の登場によって飛躍的に発展した歴史と非常に良く似ている。
さらに、完全グラフに限らない一般の辺着色グラフに w 成分 f-異色全域林が存在するための必要十分条件を証明し、それを応用することで、f-異色全域木や全域林の存在を証明する手法を確立した。
また、BH 予想と直接関係は無いが、情報セキュリティのある問題をグラフの辺着色問題に帰結して解決した。
以下に、本研究の個々の成果を具体的に述べる。

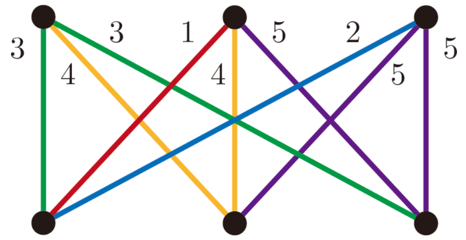
(1)f-異色全域林が存在するための必要十分条件
次の定理を証明した。「m 頂点以上の辺着色されたグラフが丁度 w 個の連結成分からなる f-異色全域林を持つための必要十分条件は、任意の色部分集合 R に対して R の色が塗られた辺を全て除去した時の連結成分数が高々 $m+\Sigma(c\in R)f(c)$ 個であることである。」
証明方針は本質的には異色全域木の必要十分条件の証明と同様であるが、異色全域木の証明では証明中に辺を付け替えるなどの操作を繰り返す箇所があり、数学的帰納法で処理していた。本証明では新たに「飽和条件」を導入する技法を用いた。
ある辺着色グラフに連結成分 w 個の f-異色全域林が存在するかどうかを背理法で証明するために、そのような全域林が存在しないと仮定すると、本定理によって、ある色集合 R が存在し、その色の辺を全て除去すると $m+1+\Sigma(c\in R)f(c)$ 個以上に分裂してしまうことが分かる。一般に、成分数が大きくなると各成分の辺の数の総和の最大値が減る事実と、対象としている辺着色グラフの性質を比べることで矛盾を示しやすくなる。
そのような手法によって証明したのが次の(2)(3)である。

(2)″ほとんど″完全グラフの f-異色全域林
2006 年に申請者は異色全域木の必要十分条件を用いて、次の定理を証明した。「どの色も高々n/2 本以下にしか現れないように完全グラフを辺着色すると異色全域木が存在する。」これを(1)の必要十分条件を用いて次のように拡張した。「G を n 頂点 g-異色グラフとする。その辺の数は ${}_{n-m}C_2$ 本（$1\leqq m\leqq n-1$）よりも多いとする。この時、もし任意の色 c について $g(c)\leqq|E(G)|f(c)/(n-m)$ ならば、G は m 個の連結成分からなる f-異色全域林を持つ。」

G を完全グラフ、f(c)=1、m=1 とすれば|E(G)|=n(n-1)/2 より g(c)≦n/2 となるから、これは元の定理を含む。

(3)完全二部グラフの f-異色全域木

2001 年に Brualdi と Hollingsworth は次の定理を証明した。「均衡完全二部グラフ Kn,n を 2n-1 色で辺着色する。もし、任意の空でない色部分集合 R に対して、その色で塗られた辺の数が$|R|^2/4$本よりも多ければ、異色全域木が存在する（図３）。」




$$\begin{aligned} e_1 &= 1 > 1^2/4 \\ e_1 + e_2 &= 2 > 2^2/4 \\ e_1 + e_2 + e_3 &= 4 > 3^2/4 \\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 &= 6 > 4^2/4 \\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 &= 9 > 5^2/4 \end{aligned}$$

**図 ３ 異色全域木が存在する均衡完全二部グラフ**

これを(1)の必要十分条件を用いて次のように拡張した。「完全二部グラフ Kn,m を辺着色する。その色集合を C とおく。w を 1≦w≦n+m を満たす正整数とし、f を色集合から非負整数への写像とする。Σ(c∈C)f(c)≧n+m-w を満たすとする。もし、任意の空でない色部分集合 R⊆C に対して、その色で塗られた辺の数が$(n+m-w-\Sigma(c\in C-R)f(c))^2/4$ よりも多ければ、w 個の連結成分からなる f-異色全域林を持つ。」

m=n、w=1、f(c)=1、|C|=2n-1 とすればΣ(c∈C-R)f(c)=|C-R|=2n-1-|R|となるから、これは元の定理を含む。

(4)拡張 BH 予想の部分的解決

拡張 BH 予想において、どのような f であれば証明が簡単になるだろうか？おそらく最も困難なのはオリジナル BH 予想である f(c)=1 の時であると思われる。そこで f(c)をできるだけ大きくした場合にどうなるかを考える。完全グラフ Kn の最大次数と全域木の辺の本数はともに n-1 であるから、f(c)≧n-1 とすると、着色されていない普通の完全グラフの全域木分解と同値となる。そこで本研究では f(c)=n-2 の場合を考えた。

全ての辺の色が等しい部分グラフを単色部分グラフという。どの色も高々n-2 本しかない全域木には必ず 2 色以上現れているので非単色全域木である。逆に、任意の n 頂点非単色木にはどの色も高々n-2 本しか存在しない。よって、(n-2)-異色全域木のことを非単色全域木と呼ぶことにする。本研究では次の定理を証明した。「(n-2)-辺彩色された n(≧4)頂点完全グラフには辺素な n/2（の切り下げ）個の非単色全域木が存在する。特に n=2k(≧4) の時はその辺集合を辺素な k 個の非単色全域木に分解できる（図４）。」

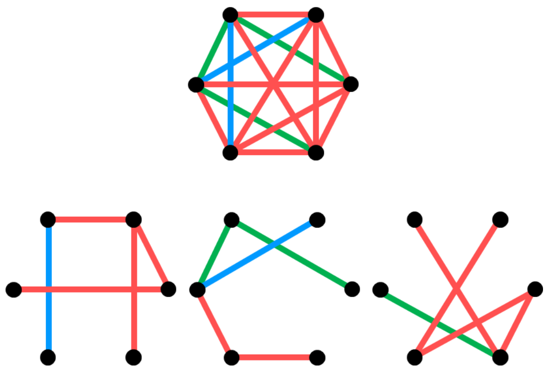


**図 ４ 非単色全域木分解の例**

これにより f(c)=n-2 とした場合の拡張 BH 予想が解決した。今後は f(c)を段階的に小さくしながらオリジナル BH 予想に迫りたい。

(5)２色辺着色有向グラフと covert channel

情報をクラウド上に保存し流通させるクラウド時代においては、利用者はクラウドをまるで自分の PC であるかのように扱い、クラウドに向けてどんどん情報を発信するため、情報漏えいが懸念される。

本研究では情報漏えいの原因の１つである covert channel についてグラフ理論的考察を行った。

covert channel とは隠れた情報漏えい経路のことである。例えば A さんは X という機密情報にアクセスできないという設定をしていたにもかかわらず、X にアクセスできる B さんが、A さんもアクセス可能な Y という文書情報に X の内容をコピーしてしまうことによって、A さんは Y を読むことで間接的に X を読めてしまうといったタイプの情報漏えい経路である。

一般に､アクセスする側を Subject(主体)、アクセスされる側を Object（客体）と呼ぶ。先の例では A さんと B さんが Subject、文書 X と文書 Y が Object である。図５のように Subject と Object の間のアクセス許可を表した行列をアクセス行列と呼ぶ.

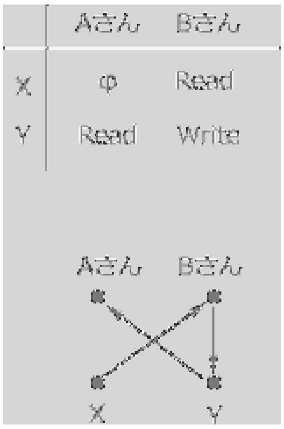



**図 5　アクセス行列と有向２部グラフの関係**

covert channel は対象とする Subject 集合と Object 集合が大きければ大きいほど生成されやすい。クラウドにおける巨大なアクセス行列に対する効率的な covert channel 検出手法が今後必要となるであろう。

従来の研究では covert channel 検出に関して「covert channel が存在することと、subject２人、object２つからなる covert channel が存在することは同値である。」という経験則があり、それをもとにいくつかの検出アルゴリズムが考え出されてきたが、この経験則の証明はされておらず暗黙に使われていた。そこで本研究ではこの経験則をグラフの辺着色問題として次のようにモデル化し証明した。

Subject 集合 S と Object 集合 O を部集合とする有向２部グラフ G を以下のように定義する。G=(S,O,E)、E={xy|subject x が object y に書き込み可能 or subject y が object x を読み込み可能}。すると、G の covert channel を、G の有向道 P=o1s1o2… oksk のうち o_1s_k が E(G)に含まれないようなものとして定義できる。

一般的に、ある主観的視点から見ると Subject であった対象が別の視点では Object であることもある。従って、S∪O を頂点集合とする有向グラフを考える方が一般的である。その場合の辺集合は E={xy|x が y に書き込み可能 or y が x を読み込み可能}とする。さらに書き込み可能ならばその辺を赤で、読み込み可能ならばその辺を青で辺着色する。すると、G の covert channel を、G の交互（赤と青が交互に現れる）有向道 P=o1s1o2… oksk のうち o_1s_k が E(G)に含まれないようなものとして定義できる。この時、次の定理が成り立つことを証明した。「covert channel が存在することと、長さ３以下の covert channel が存在することは同値である。」

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Suzuki, Kazuhiro: An f-chromatic spanning forest of edge-colored complete bipartite graphs.(2011)
http://arxiv.org/abs/1106.2441.
（査読なし）

②Suzuki, Kazuhiro: A generalization of heterochromatic graphs. (2011)
http://arxiv.org/abs/1102.4802.
（査読なし）

③ Suzuki, Kazuhiro: An f-chromatic spanning forest of edge-colored complete bipartite graphs. The China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications (CGGA 2010), pp.100-101 (2010-11). （査読あり）

〔学会発表〕（計２件）

①鈴木一弘: Non-monochromatic spanning tree decompositions of complete graphs. 離散数学とその応用研究集会、pp.41-42 (2010-08), 2010 年８月１日,（高知大学）

②木下宏揚，森住哲也，鈴木一弘: 次世代 Web におけるグラフ利用と情報漏えい検出への応用．離散数学とその応用研究集会 pp.76-77 (2009-08), 2009 年８月 10 日（茨城大学）

６．研究組織
(1)研究代表者
鈴木　一弘（SUZUKI Kazuhiro）
神奈川大学・工学部・助手
研究者番号：５０５１４４１０

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし