

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月21日現在

機関番号：34412

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740087

研究課題名（和文） ランダムに成長するネットワークに関わる確率論の展開

研究課題名（英文） Development of probability theory on randomly grown networks

研究代表者

竹居 正登 (MASATO TAKEI)

大阪電気通信大学・情報通信工学部・講師

研究者番号：60460789

研究成果の概要（和文）：ランダムに成長するネットワークと関連する確率モデルの解析に取り組み、特に、2次元 Ising モデルの高温相におけるパーコレーション問題について、臨界指数の関係式を導出した。また、不純物のある媒質中での DLA 成長をパーコレーションの視点から解析した。この他、はしご型格子上の強化ランダムウォークの極限挙動や1次元線形セルオートマトンの不変分布についても研究し、ランダムに成長するネットワークに関わる確率論の展開に一定の寄与をした。

研究成果の概要（英文）：We studied stochastic models related to randomly grown networks: The scaling relations for percolation in the two-dimensional high-temperature Ising model are derived. We analyze the DLA model with impurities from the viewpoint of percolation. Some results on reinforced random walks on ladder graphs and one-dimensional linear cellular automata are obtained.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：パーコレーション, Ising モデル, 拡散律速凝集モデル, 強化ランダムウォーク, セルオートマトン, フラクタル

1. 研究開始当初の背景

空間構造をもった確率モデルは、物理・化学・生物現象の研究においてのみならず、人々の意見が合意に達するか否かといった社会現象の研究等においても重要な役割を果たし、多様な現象のモデル構築と解析を可能にすることが求められていた。様々なモデルが提案され、シミュレーションと発見的議

論による研究が国内外で多数行なわれている一方、単純に見えるモデルであっても数学的に厳密な取り扱いがしばしば困難を伴うため、新たな局面を切り開く研究が望まれていた。パーコレーションは、ランダムな図形の解析・研究において最も基本的な確率モデルと位置づけられ、この問題を基軸とした数学的研究が極めて重要であると考えられてきた。

2. 研究の目的

パーコレーション問題はスポンジのような多孔質の物体への流体の浸透現象のモデルとして研究が始められた (Broadbent-Hammersley (1957)) : サイト問題では, 格子点 (サイト) ごと, 独立に確率 p で通過可能 / 確率 $1-p$ で通過不可能とする. ボンド問題では, 格子点をつなぐ辺 (ボンド) に対して通過可能性を考える. 通過可能な点や辺によって, 格子はいくつかの連結成分 (浸透領域, クラスタ) に分けられる. パラメーター p を変化させたとき, 特別な値 p_c を境にクラスタの図形的特徴が劇的に変化する.

相互作用をもつ粒子が格子に配置されている系で同様の問題を考えることができる. 統計力学の磁性モデルの1つである Ising モデルにおいて, 低温では磁性が生じ, 高温になると磁性を失うという相転移がある. 2次元の場合, ランダムなスピン配置においてパーコレーションが起こるか否かに完全に対応している (Russo (1979) 等).

パーコレーション理論の着想を生かして, ランダムに成長するネットワークに関わる確率論の諸問題の研究を推進することを目的とした.

3. 研究の方法

系の構成要素の間に何らかの相互作用がはたらいている確率モデルについて, フラクタル性やパーコレーションの視点を生かして研究を進めた.

(1) 2次元 Ising モデルの高温相について, 系のもつ空間的な混合性 (漸近的な独立性) を活用してパーコレーション問題の臨界現象の研究を行なった.

(2) 不純物のある2次元 DLA 成長モデルについて, モンテカルロ計算を行ない, その結果をパーコレーション理論に基づき解析した.

(3) 1次元的な格子の上で強化ランダムウォークについて, ウォーカーの訪問する領域の広がり方を調べた.

(4) 1次元線形オートマトンの不変分布について, この写像の時空パターンに現れるフラクタル図形と関連させつつ研究した.

4. 研究成果

(1) 2次元 Ising モデルの高温相におけるパーコレーション問題における臨界現象の研究: 『相転移における臨界現象はモデルの詳細によらない』とされる「普遍性」の描像を, 数学的に具体化することは極めて重要な研究課題である. 先行研究で扱われたのは幾分人工的な模型であった. 磁性モデルの1つである Ising モデルでは, 格子点上の「小磁石

が+または-の2状態をとり, 隣接する小磁石の向きがそろいやすいという相互作用がはたらく. 2次元 Ising モデルで臨界温度より高温の場合, 平衡分布は外部磁場 h の状況によらず一意的である. h をパラメーターとして+のつながり方に関するパーコレーション問題を考えると, 平衡分布のもつ混合性により, 独立なモデルと似た臨界現象が期待される. 樋口保成氏 (神戸大学) 及び Yu Zhang 氏 (コロラド大学) と共同で研究を行ない, 次の成果を得た.

- ・パーコレーションに関する特性量の臨界点近傍での振舞いを表す臨界指数について, ある種の臨界指数の存在の仮定の下で独立な場合と同じ関係式が成立することを証明した. これは独立なパーコレーション問題における Kesten の結果に対応するものである. 証明の全体をプレプリントにまとめて公表している (arXiv:1010.1586, 146 ページ).

- ・外部磁場がパーコレーションの臨界値である場合に, 5-arm と呼ばれる事象の確率を調べ, そのオーダーを求めた. これはスケーリング極限を求める問題において重要な基礎となる結果である.

(2) 不純物中における結晶成長の研究: 氷の成長に対する不凍糖タンパク質のはたらきについて, 曾原崇史氏, 阿久津典子氏 (大阪電気通信大学) と共同で研究を行なった. 排除体積効果を明確にとらえるべく, 不純物のある2次元 DLA 成長モデルをモンテカルロ計算によって調べた. 得られた結果をパーコレーション理論に基づいて解析し, 不純物の連結に関する相関距離を導入することで氷の成長と不純物の連結との競合として統一的に理解できることを示した. 不凍糖タンパク質以外の場合への適用可能性についても考察を行なった.

(3) 強化ランダムウォークの極限挙動の研究: 自己の軌跡が推移確率に影響を与えるような確率過程の解析には一般論が存在しないのが現状である. 重要なモデルの族として, 現在地点から隣接点へ移動する確率が, それらを結ぶ辺を横断した回数に応じて増大するという強化ランダムウォークがある. 2次元正方格子の1次元的な部分格子である, はしご型グラフにおける極限挙動の研究を行なった. 1つの辺を永久に往復する可能性がない場合, 木グラフの場合の議論を拡張することによって, 極限挙動に関する0-1法則を示すことが可能な場合があることが判明した.

(4) 1次元線形オートマトン rule 90 に対する不変分布の研究: $0, 1$ の両側無限列 $x: \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots$ に対して, 新しい両側 Λx を $(\Lambda x)(i) = x(i-1) + x(i+1) \pmod{2}$ によって定める. この写像 Λ は Wolfram による分類で rule 90 と呼ばれている. 線形性という

強い解析手段を備えているが、複雑で興味深い性質は他のルールに勝るとも劣らず、多くの先行研究においてもなお汲み尽くされていない。この問題について、空間のシフトに関して不変かつ混合的な不変分布は本質的に2種類しか存在しないが、空間のシフトに対して不変だが混合的でない不変分布は無数存在することが既に知られている。空間のシフトに対して不変で、エルゴード的だが混合的でない不変分布について研究した。線形オートマトンの生成するフラクタル図形に注目することにより、これまで知られていたものとは別な不変分布の族を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 11 件)

- (1) Yasunari Higuchi, Masato Takei : Scaling relations for percolation in the 2D high temperature Ising Model, RIMS 研究集会 “Applications of RG Methods in Mathematical Sciences”, 京都大学 数理解析研究所, 2011 年 9 月 14 日, 招待講演
- (2) Yasunari Higuchi, Masato Takei : Critical behavior for percolation in the 2D high-temperature Ising model, UCCS Mathematics Colloquium, Colorado 大学, 2011年9月2日, 招待講演
- (3) 樋口保成, 竹居正登, Yu Zhang : On a variant of Russo's formula for Ising percolation inside critical window, シンポジウム「無限粒子系, 確率場の諸問題 VI」, 奈良女子大学, 2011 年 2 月 5 日, 一般講演
- (4) 樋口保成, 竹居正登, Yu Zhang : Scaling relations for percolation in the high temperature Ising Model on the square lattice, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications (SPA OSAKA 2010), 千里ライフサイエンスセンタービル(大阪府), 2010 年 9 月 7 日, 一般講演 (ポスター発表)
- (5) Takafumi Sohara, Noriko Akutsu, Masato Takei: Competition between the growth of a two dimensional small ice cluster and the linking of adsorbates having crystal growth inhibition activity: an approach to the prevention of freeze due to anti-freeze (glyco-) protein, 12th International Conference on the Physics and Chemistry of Ice (PCI-2010), 北海道大学, 2010 年 9 月 6 日, 一般講演
- (6) Masato Takei : Scaling relations for 2D Ising percolation, International workshop “Universality and Scaling Limits in Probability and Statistical Mechanics”, 北海道大学, 2010 年 8 月 31 日, 招待講演
- (7) Takafumi Sohara, Noriko Akutsu, Masato Takei : Analysis of Percolation Behavior on the Growth of Two-Dimensional Aggregation with Adsorbates Having Crystal Growth Inhibition Activity: An Approach to the Prevention of Freeze due to Anti-Freeze (Glyco-) Protein, The 16th International Conference on Crystal Growth (ICCG-16), Beijing International Convention Center(中国), 2010 年 8 月 9 日, 一般講演 (ポスター発表)
- (8) 竹居正登 : 2次元 Ising モデルのパーコレーションにおける臨界現象, 2010 年度日本数学会年会, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 24 日, 招待講演 (統計数学科会特別講演)
- (9) 曾原崇史, 阿久津典子, 竹居正登 : 氷の 2次元 DLA 成長における不凍糖タンパク質の影響: 不純物パーコレーションと氷成長の競合, 第 39 回結晶成長国内会議, 名古屋大学, 2009 年 11 月 13 日, 一般講演 (ポスター発表)
- (10) 曾原崇史, 阿久津典子, 竹居正登 : 不凍糖タンパク質による排除体積効果を考慮した 2次元 DLA 成長 II—不純物パーコレーションと氷成長の競合—, 日本物理学会 2009 年秋季大会, 熊本大学, 2009 年 9 月 27 日, 一般講演
- (11) 樋口保成, 竹居正登, Yu Zhang : 2D Ising percolation のスケーリング関係式について, 2009 年度日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学, 2009 年 9 月 24 日, 一般講演

[図書] (計 1 件)

- (1) リック デュレット著(竹居正登・井手勇介・今野紀雄訳): ランダム グラフ ダイナミクス - 確率論からみた複雑ネットワーク, 産業図書, 2011 年, 326 ページ.

[その他]

ホームページ等

[研究代表者のホームページ]

<http://www.kisoriko.jp/kisoriko/?TakeiMasato>

[研究機関におけるホームページ]

<http://enju.mc2.osakac.ac.jp/creators/27/manifestations>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹居 正登 (MASATO TAKEI)

大阪電気通信大学・情報通信工学部・講師

研究者番号：60460789