

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月18日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740089

研究課題名（和文） 非線形分散型方程式の孤立波解の安定性

研究課題名（英文） Stability of solitary waves for nonlinear dispersive equations

研究代表者

福泉 麗佳（FUKUIZUMI REIKA）

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：00374182

研究成果の概要（和文）：光学ポテンシャル下で捕えられたボース・アインシュタイン凝縮のモデル方程式で、レーザー振動数のゆらぎの影響を考慮した方程式に関し、確率線形シュレディンガー方程式の基本解を構成することで解の存在を示し、数学的にモデルの正当化を行った。また、安定な定在波の長時間挙動が、時間に関するホワイトノイズから受ける影響を数学的に表現した。一方で、中空コア光ファイバーを伝播するレーザーを表わすモデルの高エネルギーモード解の安定性を調べ、レーザーが伝わる媒質中に対称な2点不純物が存在するときの定常波解の対称性の破れを証明した。

研究成果の概要（英文）：Concerning a model for the Bose-Einstein Condensation trapped under an optical confinement involving fluctuations by laser frequencies, I justified mathematically the existence of solution constructing the fundamental solution of linear stochastic Schrodinger equations, and proved a long time behavior of stable standing waves influenced by temporal white noise. On the other hand, I investigated the stability of excited states for a model which describes the propagation of laser beam in the hollow-core fibers. As for a model of optic fibers, I showed the symmetry breaking of ground state for the case where two symmetric defects are present in the medium.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式論、解析学、確率論、数理物理

1. 研究開始当初の背景

超低温で理想ボーズ粒子が最低エネルギーに凝縮するという Einstein の Bose-Einstein Condensation（以下、BEC と略）の存在予言

（1924年）を、1995年にアメリカの2つの実験グループが実現して以来、BECに関する研究は現在幅広く行われている。原子 BEC を捕獲することにより、ミクロな現象をマクロスコ

ピックに観測できるだけでなく、構造が簡単であることから巨視的量子コヒーレンスや非平衡緩和過程を見ることも可能にするという点で物理的に極めて興味深く重要な対象である。この BEC を記述する基本的なモデル方程式は調和ポテンシャルを伴う非線形 Schrödinger 方程式である。Abdullaev-Baizakov-Konotop(2001)によると、BEC を捕まえるためのレーザーによるトラップを行う際に、レーザー強度が時間に依存して微小に変動する状況が起こり、より現実に近いモデルとしてそのランダムネスを、調和ポテンシャルを摂動させることにより考慮すべきだとのことである。軌道安定な定在波解及び軌道不安定な定在波解の近傍から出発する解の時間無限大での振舞いや、ノイズによる摂動を考慮した方程式において、解の存在やノイズが安定な定在波解に及ぼす影響などは物理だけでなく数学的にも興味深い問題であった。

関連した方程式として、研究代表者はレーザーの伝播を表すモデル方程式（非線形 Schrödinger 方程式）で、媒質中に 1 点不純物が含まれる場合について定在波の安定性について研究したことがある。この不純物はデルタポテンシャルを用いて表される。この方程式については、物理的には、1993 年頃の Malomed らによる soliton scattering (初期値データとして孤立波—不純物がない場合に観測される定在波—をとったときに、波は不純物のある点においてどのような伝わり方をするか)の研究があるが、数学的には 2004 年になってはじめて Zworski らにより soliton scattering の数学的厳密化が行われるようになった。発展問題として、不純物が有限個・無限個伴った媒質における波の伝わり方も調べるべき問題であった。

2. 研究の目的

一般に、波の伝播の様子を調べるためには、定常波、定在波、進行波などの特殊解の存在、安定性の解析が重要な役割を果たす。物理的には、波動現象において初期状態に関わらず、時間がたてば同じようなパターンの波が観測でき、それが上記の波のうち安定なものによって記述されているのではないかという考え方に基づくものである。完全可積分性という代数構造をもつ方程式系では、孤立波の重ね合せと見なせる多重ソリトン解が存在し、それらは逆散乱法、広田の方法で具体的に表現できて、その挙動も詳細に解析できる。

しかし可積分系に摂動を加えると可積分性は壊れてしまうため、このような手段では解析

できなくなる。一方で、関数解析的手法は多少、方程式の非線形構造を変更しても有効である。そこで完全可積分でない場合に、特殊解の安定性を関数解析的手法で解析しようというのが目的である。

3. 研究の方法

海外からの理論数学の研究者(研究協力者)を訪問・招待し議論する。同時に、モデル方程式の意味・解の性質として何を予想するかを物理学の研究者と議論し、数学的に証明する際のヒントとする。数値シミュレーションによる観察によって現象を予想、数値シミュレーションの数学的証明を行う。

4. 研究成果

レーザートラップが時間に依存して微小に変動する状況を考慮したモデル方程式、つまりノイズを伴う調和ポテンシャルつきシュレディンガー方程式について、軌道安定な定在波解がノイズ強度と比較してどの程度元の姿を保っているか、時間が十分経った後で、定在波解の modulation パラメータがどのような確率微分方程式によって支配されるかを研究した。また、最少エネルギーを持つ定在波解のまわりでの線形化方程式について、線形化方程式の解のスペクトルエネルギーが、調和ポテンシャルつきノイズの影響で、3 番目の励起モードに集中することを示した(発表論文[3])。

同方程式の初期値問題にも触れ、確率項を伴う線形シュレディンガー方程式の基本解を構成し、その性質を用いてランダムな Strichartz 評価を導出した。結果の応用として、解のブラウン運動に関する連続性、拡散近似も証明した。以下の論文に纏め、投稿中である。

A. deBouard, R. Fukuizumi, *Representation formula for a stochastic Schrödinger evolution equation and applications.*

レーザーの伝播を表すモデル方程式で、媒質中に対称な 2 点不純物が含まれる場合について、定常状態の対称性の破れに関して研究を行った。2 点不純物はデルタ測度で表現されるが、発表論文[2]では、より一般の 2 個の対称な井戸を持つポテンシャル(但し、二つのポテンシャルが十分離れているとする)に対して調べている。特徴的な手法としては、準古典近似により対応する線形問題の固有関数やスペクトルの情報を利用した点である。

対称性の破れは、定常解の分岐がどのよう

にして発生するかでその性質を観ることが出来る。論文[2]では非線形項の冪を一般化することにより、次元によらない臨界冪が存在し、その臨界冪を超えると、subcritical pitchfork 型の分岐が起こることを示した。

臨界冪を超えなければ、対称な安定定常解が対称で不安定な定常解と安定な非対称定常解の二つに分かれ、臨界冪を超えると対称な定常解以外に 2 つの非対称定常解が発生する。

最後に、投稿中の論文：

R. Fukuizumi, F. Hadj Selem and H. Kikuchi, *Stationary problem related to the nonlinear Schrödinger equation on the unit ball.*

において、有界領域上での非線形 Schrödinger 方程式を考え ground state と呼ばれる最少エネルギー定常解だけでなく、高エネルギーを持つ定常解 excited states の安定性を証明した。但し、excited states に関しては、Dirichlet ラプラス作用素の各固有関数の持つゼロ点が時間発展により保たれる状況下での安定性である。

Ground state に関しては、非線形 Schrödinger 方程式の L^2 臨界冪において、全空間では爆発の意味での強い安定性を持つことが知られている。それに反して、有界領域では安定になることを証明した。

理論では証明できなかった部分、例えばゼロ点が時間発展により保たれない状況では安定性が崩れるかどうかに関して、数値計算を行った。全空間では Excited states は不安定であろうと一般に言われているが（まだ証明されていない）、有界領域に関しては、どんな摂動に関しても Dirichlet ラプラス作用素の各固有値の近くでは、excited states は安定であろうという観察結果を出した。

有界領域という制限が、ground state だけでなく、excited states を考えた場合でも安定な波を生成しやすいことが結論づけられた。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

[1] 福泉麗佳, ランダムな外力を伴うグロス

ピタエフスキー方程式, 京都大学数理解析研究所講究録, 2012 年, 印刷中(査読無)

[2] 福泉麗佳, Andrea Sacchetti, Bifurcation and Stability for Nonlinear Schrödinger Equations with Double Well Potential in the Semi classical Limit, J. Stat. Phys.145 (2011) 1546-1594 (査読有)

[3] Anne de Bouard, 福泉麗佳, Modulation analysis for a stochastic NLS equation arising in Bose-Einstein condensation, Asymptot. Anal. 63(2009) 189-235 (査読有)

〔学会発表〕（計 5 件）

[1] 福泉麗佳, ランダムな外力を伴うグロス・ピタエフスキー方程式, “偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析,” 京都大学数理解析研究所, 2011 年 12 月 21 日.

[2] 福泉麗佳, ノイズが定在波に与える影響について, OCAMI 楕円型方程式研究集会一定常非線形シュレディンガー方程式の定在波解の研究- 大阪市立大学 2011 年 8 月 11 日.

[3] 福泉麗佳, Bifurcation and stability of semi classical bound states of NLS with two point interactions, 第 28 回九州における偏微分方程式研究集会 九州大学 2011 年 1 月 25 日.

[4] 福泉麗佳, Stochastic fluctuation in the Gross-Pitaevskii equation, Model equations in Bose-Einstein condensation, 京都大学 2010 年 12 月 8 日.

[5] 福泉麗佳, Diffusion approximation for a

stochastic GP equation, Workshop on solitary waves and related topics, 九州大学 2010 年 7 月 16 日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~fukuizumi>

[セミナーでの発表]

[1] 福泉麗佳, *A limit theorem in stochastic nonlinear Schrödinger equations*, Nagoya DE セミナー, 名古屋大学, 2010 年 12 月 13 日

[2] 福泉麗佳, *Estimation dispersive pour des équations de Schrödinger avec un potential stochastic*, CMAP's seminar, Ecole Polytechnique, France, 2010 年 11 月 9 日

[3] 福泉麗佳, *Fujiwara's Feynman path theory applied to stochastic Schrödinger equations*, 非線形解析セミナー, 慶応大学, 2010 年 7 月 21 日

[4] 福泉麗佳, *Stability analysis of bound states for NLS before and after a symmetry breaking in the semiclassical regime*, 広島数理解析セミナー, 広島大学, 2010 年 7 月 9 日

[5] 福泉麗佳, *Estimation dispersive pour des équations de Schrödinger avec un potential stochastic*, Séminaire de l'Equipe ACSIOM, Université de Montpellier 2, France, 2010 年 6 月 1 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

福泉 麗佳 (FUKUIZUMI REIKA)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号 : 00374182