

機関番号：12301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2010

課題番号：21740091

研究課題名（和文）破壊現象解明のための非線形弾性体の数理解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of nonlinear elasticity for elucidation of fracture phenomena

研究代表者

伊藤 弘道 (ITOU HIROMICHI)

群馬大学・大学院工学研究科・助教

研究者番号：30400790

研究成果の概要（和文）：破壊現象への応用を念頭に置き、以下の非線形問題の数理解析を行い、成果を得た。まず、応力・歪み関係式がべき乗則で支配される非線形弾性体のき裂を含む領域における境界値問題について、弱解の一意的可解性を証明した。次に2つの異なる線形弾性体の界面上のき裂に非線形境界条件（クーロン則に従う摩擦効果を取り入れた非貫通条件）を課した境界値問題について可解性を示し、さらに、その解のき裂先端近傍での振る舞いを詳細に調べた。

研究成果の概要（英文）：With application to fracture phenomena in mind, we studied mathematical analyses for the following nonlinear problems and obtained the results. First, in nonlinear elasticity which has a crack and the stress-strain relation is governed by power law, we showed a unique solvability of the weak solution for the boundary value problem. Second, we proved a solvability of the solution of a boundary value problem as a model of interfacial crack under the nonlinear condition (Coulomb friction law and non-penetration condition) between two bonded dissimilar linearized elastic media. Further, we investigated the behavior of the solution near the crack tip.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形弾性体方程式、破壊力学、き裂、逆問題、非破壊検査、摩擦、非貫通条件

1. 研究開始当初の背景

現在まで偏微分方程式論は滑らかな領域内で理論が確立してきた。しかし、実際の物

理現象には滑らかなでない領域、例えば、き裂や境界に角を含む領域、での解析が必要なものも少なくない。破壊現象はその代表例であ

り、地震や様々な材料の安全性など我々の生活に直接影響を及ぼす身近でかつ重要な現象である。現状では工学の分野で盛んに研究が行われているが、理論的には領域が持つ特異性から解析は非常に困難である。

破壊現象とはき裂進展過程を示す動的現象であり、1920年 A. A. Griffith によって2次元線形弾性体領域におけるき裂進展に関する理論的解析が行われ、破壊現象の数理解析の先駆けとなった。その後、き裂を含む線形弾性体における数理解析が盛んに行われてきた。

しかし、き裂を含む物体の変形を解析する際、本当に線形弾性体を想定すべきなのかという疑念が生じる。そもそも線形弾性体とは「フックの法則」（移動が拘束された弾性体に力を加えたとき、応力が発生しひずみが生じる。その時、発生する応力の各成分がすべてのひずみ成分の線形結合で表現できるという法則）が成り立っている物体であり、一般にフックの法則が成り立つためには「ひずみが微小」という前提条件がある。しかしフックの法則を仮定し、き裂を含む線形弾性体を考えると、き裂先端で応力集中が起き、ひずみが無限大に発散することが証明できるため、矛盾が生じ、実際の破壊現象適用への限界を示唆している。

そこで研究代表者はき裂を含む弾性体が満たす構成方程式を再度吟味し直し、「連続体力学とその非線形材料への応用」を専門とする K. R. Rajagopal 教授（テキサス A & M 大学）が考案した線形弾性体よりも広い枠組みで現象を捉えられ、且つ理論的に矛盾のない新しい非線形弾性体モデルについての解析を開始することにした。

2. 研究の目的

本研究の目的は実際に起きている破壊現象の解明を目的とした、非線形弾性体の数理解析である。具体的には以下の2つである；

- (1) 実際の破壊現象に則した2次元非線形弾性体における、き裂を含む領域での境界値問題の解の一意存在性を解析し、定性的理論を構築する。
- (2) (1)で得た解の性質を調べる。特にき裂先端における特異性や級数展開の導出など。

3. 研究の方法

上記の2つの目的を達成するために、単に数学的議論の展開だけでなく、破壊現象に基づいた数学解析を念頭に置いているので、工学・物理学分野における研究者との情報交換

や討論を緊密に行い、また海外研究協力者3氏：K. R. Rajagopal（テキサス A & M 大学、アメリカ）、V. A. Kovtunenکو（グラーツ大学、オーストリア）、A. M. Khludnev（ラブレンティエフ流体力学研究所、ロシア）の研究支援を要請しながら、以下の手順で研究を進めた。

- (1) 考える2次元非線形弾性体のき裂を含む領域における境界値問題を定式化する。その際、構成方程式導出の物理的背景や破壊現象への適用範囲を正確に理解する。この段階で問題が起きないように、モデルの考案者である研究協力者（Rajagopal 氏）の研究支援を要請する。
- (2) この境界値問題の弱解の存在性と一意性について考察する。その際、このモデルの弾性エネルギーの凸性が導けると予想しており、それによって、既存の凸解析の一般論で解決できるのではないかと考えているので、凸解析の専門家である研究協力者（Kovtunenکو 氏、Khludnev 教授）の研究支援を要請する。
- (3) 得られた弱解の性質を調べる。特にき裂先端近傍における弱解の漸近挙動を考察する。その際、他の非線形モデル（塑性など）との比較、検討を行う。また研究協力者の Khludnev 教授は線形弾性体における非線形境界条件での解の漸近展開を導出しているため、そこでの専門的知識の提供を要請する。
- (4) 解のき裂先端における挙動を解析する。ここでは特に級数展開公式の導出に力を注ぐ。線形弾性体の場合は Muskhelishvili らが導出した応力関数の解析接続による方法で解決できたので、そのノウハウを生かし、関数論的手法で試みる。
- (5) 得られた結果を様々な分野における研究集会などで発表する。特に破壊現象に携わる工学者との交流を深め、本研究で扱う数理解析モデルの妥当性や本研究結果の検証を行う。
- (6) さらに時間的余裕があれば、本研究を発展させていく。例えば、本モデルの初期境界値問題や他の非線形モデルの解析、3次元の問題など。特に本研究の様なき裂などの不連続性をもつ領域における境界値問題の解の性質を解析することは、その不連続性を境界データから再構成する逆問題に深く関連しているため、その問題に応用する。

4. 研究成果

上記研究目的(1)、(2)に対応させ分けて記す。さらに、上記研究目的の応用として、逆問題

に関する結果を得たため、それを(3)として記す。

- (1) 上記海外研究協力者 Rajagopal 教授が考案した非線形弾性体モデルをき裂を含む2次元有界領域で考察した。このモデルの大きな特徴は「ひずみが微小」を前提条件として課すものの、応力とひずみの関係式が線形ではなく、ある種のべき乗則(非線形)を考えるため、き裂先端で応力集中が起きてもひずみが微小という条件は保持され、理論的矛盾が生じず、少なくとも、線形弾性体よりは破壊現象について広い適用範囲を持つと位置付けられる。この問題に対し、今までに確立している凸解析の理論を援用し、境界値問題の弱解の一意存在性を証明した。これにより上記研究目的(1)が達成されたことになる。この成果の公表は研究目的(2)の達成後を考えている。
- (2) ①得られた弱解の一意存在性から出発して、その弱解のき裂先端における挙動を解析した。解のき裂先端近傍における局所的正則性は既存の数学理論で導出されるが、その具体的な挙動(収束級数展開など)の導出には困難を極め、様々な手法を試みてはいるものの未だ解決には至っておらず、現在も研究中である。それと同時に、上記の非線形弾性体方程式と性質が似ている支配方程式がpラプラス方程式(準線形楕円型)の場合の解析を並行して行った。この場合については単独方程式のため、使える数学的手法が多く、何らかの結果が導出できるのではないかと期待できるが、こちらについても未だ結論までには至らず、現在も研究中である。
②本研究目的(2)を別の角度から眺めるために、線形弾性体方程式でき裂上での境界条件が非線形の問題を考察した。この問題の意義は、地球のプレート境界部で起きる地震などの破壊現象を考察する際に重要になる摩擦効果の取り扱いにある。そこで、2つの異なる線形弾性体の界面上のき裂に非線形境界条件(クーロン則に従う摩擦効果を取り入れた非貫通条件)を課した境界値問題について可解性を示し、さらに、その解が;き裂が開く場合、固着する場合、滑る場合にき裂先端近傍でそれぞれの様な振舞いをするのか、収束級数展開という形で詳細に調べた。また同時に、特異性のオーダーがどの様に決定されるかを明らかにし、さらに非貫通条件(不等式タイプの非線形境界条件)がその展開にどの様な影響を及ぼすか明らかにした。ここでの研究成果は海外研究協力者である グラーツ 大学の

V. A. Kovtunenکو 氏と慶應義塾大学の谷温之教授との共著として国際学術誌 Applications of Mathematics に掲載された(下記雑誌論文①参照)。また、この結果を国内外の研究集会で積極的に講演発表し、肯定的な評価を受けた(下記学会発表②、③、④、⑤参照)。

- (3) 当初の研究目的にはなかったが、本研究の1つの応用例として考えられる非破壊検査に関わる境界値逆問題についての結果が得られた。具体的には、群馬大学池島優教授の囲い込み法を援用し、2次元等方均質な線形弾性体における多角形空洞の逆問題を考察した。また同時に、この問題を解く鍵となる多角形頂点近傍での境界値問題の解の収束級数展開を導出した。その結果、物体の境界における一組の観測データから未知の多角形空洞の凸包を再構成する公式を確立した。この結果の特徴は、データ(表面にかかる応力と対応する変位)や未知の空洞について何ら制約条件が不要な事である。またこの結果は池島氏との共著論文として逆問題を専門とする国際学術誌 Inverse Problems に掲載された(下記雑誌論文②参照)。さらに、この成果は国内外の研究集会での招待講演をいくつか依頼され、多くの反響が得られた(下記学会発表①、⑥、⑦、⑧、⑨、⑩、⑪参照)。特に香港での逆問題の国際研究集会 I C I P 2 0 1 0 (下記学会発表①参照)ではPlenary Lectureを行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Hirouchi Itou, Victor A. Kovtunenکو, Atushi Tani, The interface crack with Coulomb friction between two bonded dissimilar elastic media, Applications of Mathematics, 査読有, Vol. 56, No. 1, 2011, pp. 69—97
- ② Masaru Ikehata, Hirouchi Itou, Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data, Inverse Problems, 査読有, Vol. 25, No. 10, 2009, 105005(21pp)

[学会発表] (計 12 件)

- ① Hiromichi Itou, On Reconstruction of an Unknown Polygonal Cavity in a Linearized Elasticity with One Measurement, International Conference on Inverse Problems (ICIP2010), 2010.12.16, City University of Hong Kong (香港、中華人民共和国)
- ② Hiromichi Itou, On a frictional interface crack problem between dissimilar linearized elastic media, International Conference on Applied Mathematics and Informatics (ICAMI2010), 2010.12.2, Hotel Sol Caribe San Andres (サンアンドレ、コロンビア共和国)
- ③ Hiromichi Itou, On a frictional interface crack problem between dissimilar linearized elastic media, Perambulation of continuum mechanics (Meeting In Celebration of The Sixtieth Birthday of K. R. Rajagopal), 2010.11.11, Texas A&M University (テキサス州カレッジステーション、アメリカ合衆国)
- ④ 伊藤弘道, V. A. Kovtunenکو, 谷温之, On a frictional interface crack problem in dissimilar linearized elastic materials, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 2010.9.25, 名古屋大学 (愛知県)
- ⑤ 伊藤弘道, V. A. Kovtunenکو, 谷温之, On a frictional interface crack problem between dissimilar linearized elastic media, 日本応用数理学会 2010 年度年会, 2010.9.9, 明治大学 (東京都)
- ⑥ Hiromichi Itou, On reconstruction of an unknown polygonal cavity in a linearized elastic body with one measurement, 5th International Conference IP:M&S (Inverse Problems: Modeling and Simulation), 2010.5.28, Conference Center of the South Kensington campus of Lykia World & Links Golf Antalya hotel (アンタルヤ、トルコ共和国)
- ⑦ 伊藤弘道, Singularities of solutions of the linearized elasticity system near a corner or a crack tip and inverse problems, 微分方程式の総合的研究, 2009.12.19, 東京大学 (東京都)
- ⑧ 伊藤弘道, き裂先端や角における線形弾性体方程式の解の特異性と逆問題, 9th Workshop on Continuum Mechanics Focusing on Singularities (CoMFoS09), 2009.11.21, 湘南国際村センター (神奈川県)
- ⑨ 伊藤弘道, 池島優, 線形弾性体における多角形空洞の一組の観測データによる再構成について, 日本応用数理学会 2009 年度年会, 2009.9.28, 大阪大学 (大阪府)
- ⑩ 伊藤弘道, 線形弾性体における多角形空洞の一組の観測データによる再構成について, 第五回 非線型の諸問題, 2009.9.17, 長崎商工会議所 (長崎県)
- ⑪ Hiromichi Itou, On reconstruction of polygonal cavities in an elastic body with one measurement, The 34th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2009.8.25, 北海道大学 (北海道)

[その他]

ホームページ等

<http://math.dept.eng.gunma-u.ac.jp/~hitou/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 弘道 (ITOU HIROMICHI)

群馬大学・大学院工学研究科・助教

研究者番号：30400790