

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月28日現在

機関番号： 14401
 研究種目： 若手研究 (B)
 研究期間： 2009～2011
 課題番号： 21740097
 研究課題名（和文） 擬微分作用素と時間周波数解析

研究課題名（英文） Pseudodifferential operators and time-frequency analysis

研究代表者

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)
 大阪大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号： 10437337

研究成果の概要（和文）： 擬微分作用素および多重線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性について研究を行った。特に有界性を保証するためにはいったいどれだけの滑らかさの条件をシンボルが持っていればよいのかを考え、これまでに知られていた滑らかさの条件を弱めることに成功した。

研究成果の概要（英文）： I studied the boundedness of pseudodifferential operators and multilinear Fourier multiplier operators. In particular, I succeeded in weakening the known smoothness conditions to assure the boundedness of them.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 調和解析, 擬微分作用素, フーリエマルチプライヤー, 多重線形作用素

1. 研究開始当初の背景

擬微分作用素, フーリエマルチプライヤー作用素は, 偏微分方程式の研究において非常に重要な役割を果たす。例えば, 熱方程式, 波動方程式などの基本的な方程式から, 非線形偏微分方程式まで, 現在の偏微分方程式の研究には必要不可欠な道具である。

近年, 時間周波数解析において基本的な役割を果たす関数空間, モジュレーション空間が, J. Sjöstrand (Math. Res. Lett. 1994) により, 擬微分作用素へ応用された。このモジュレーション空間は滑らかではない関数を含むことから, Sjöstrand の結果はこれまでに知られていた擬微分作用素の有界性定理

とは異なるものであったため注目を集めた。そして, モジュレーション空間の擬微分作用素へのさらなる応用面での可能性を探ろうというのが研究開始当初の背景であった。

2. 研究の目的

(1) A. Boulkhemair (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995) は $S_{\{0,0\}^0}$ クラスの擬微分作用素を, ある不等式を用いてモジュレーション空間に対する Sjöstrand の結果を, ベゾフ空間に対する M. Sugimoto (J. Math. Soc. Japan 1988) の結果をそれぞれ導いた。興味深い点は, Sjöstrand と Sugimoto の結果は互いに独立な関係にある

にもかかわらず同じ不等式から導かれることである。この点で、Boukhemair が指摘した不等式は、関数空間を擬微分作用素のシンボルクラスとして応用するという問題においては、本質的な役割を果たすと言ってよいだろう。Boukhemair が指摘した不等式は L^2 -有界性に関するものだったため、この不等式を L^p -有界性に関するものへと一般化できるのかが研究開始当初の目的であった。

(2) この 10 年、調和解析の分野では、多重線形の理論が注目を集めている。まだまだ発展中の分野であるため、現在は十分に滑らかな積分核やフーリエマルチプライヤーに対して作用素の有界性が議論されている。しかしこれら多重線形の結果を線形の立場から眺めた時、まだまだ改良すべき点がたくさんある。そのため、非常に弱い滑らかさの条件の下で、多重線形調和解析学における有界性定理を構築しようというのが、2010 年頃からの研究目的となった。

3. 研究の方法

(1) シンボルに対する Boukhemair 型の条件の下、擬微分作用素の L^p -有界性を考える際に、 $p < 2$ の場合には Hardy 空間におけるアトム分解を用い、 $p > 2$ の場合には Wigner 分布関数を用いた。

(2) 多重線形フーリエマルチプライヤー作用素の有界性の結果として、Coifman-Meyer の定理は基本的である。しかし、彼らの結果を線形の立場から眺めた場合、有界性を保証するためにマルチプライヤーに対して要求する滑らかさの仮定が強すぎる。この滑らかさの仮定を弱めるために、多重線形フーリエマルチプライヤーに対する Hörmander 型の定理を考えた。

4. 研究成果

(1) Boukhemair 型の条件の下、擬微分作用素の L^p -有界性を証明することに成功した ([雑誌論文], (1))。

(2) 多重線形フーリエマルチプライヤーに対する Hörmander 型の定理を得ることに成功した ([雑誌論文], (4))。この方向性の研究は、まだまだ解決すべき課題があり、現在も引き続き研究中である。

(3) [雑誌論文], (2), (3), (5)~(8)では、モジュレーション空間に関する興味深い結果を得ることが出来た。(2)の論文では、モジュレーション空間における非線形作用について考えたが、この研究をさらに推し進めて、非線形偏微分方程式への応用を考えたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- (1) N. Tomita,
On the L^p -boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, *Arkiv för Matematik* 49 (2011), 175-197, 査読有.
- (2) M. Sugimoto, N. Tomita and B. Wang,
Remarks on nonlinear operations on modulation spaces, *Integral Transforms and Special Functions* 22 (2011), 351-358, 査読有.
- (3) M. Ruzhansky, M. Sugimoto, J. Toft and N. Tomita,
Changes of variables in modulation and Wiener amalgam spaces, *Mathematische Nachrichten* 284 (2011), 2078-2092, 査読有
- (4) N. Tomita,
A Hörmander type multiplier theorem for multilinear operators, *Journal of Functional Analysis* 259 (2010), 2028-2044, 査読有
- (5) N. Tomita,
Unimodular Fourier multipliers on modulation spaces $M^{\{p,q\}}$ for $0 < p < 1$, *RIMS Kōkyūroku Bessatsu* 18 (2010), 125-132, 査読有.
- (6) N. Tomita,
On the Hörmander multiplier theorem and modulation spaces, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 26 (2009), 408-415, 査読有.
- (7) M. Kobayashi, A. Miyachi and N. Tomita,
Embedding relations between local Hardy and modulation spaces, *Studia Mathematica* 192 (2009), 79-96, 査読有.
- (8) A. Miyachi, F. Nicola, S. Rivetti, A. Tabacco and N. Tomita,
Estimates for unimodular Fourier multipliers on modulation spaces, *Proceedings of the American Mathematical Society* 137 (2009), 3869-3883, 査読有.

[学会発表] (計 21 件)

(1) 富田直人, 宮地晶彦,
Sharp smoothness conditions for bilinear
Fourier multipliers, 日本数学会年会, 2012
年 3 月 29 日, 東京理科大学.

(2) 富田直人,
Sharp estimates for bilinear Fourier
multipliers, 松山解析セミナー, 2012 年 2
月 4 日, 愛媛大学.

(3) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーが有界作
用素になるための滑らかさの条件について,
調和解析セミナー, 2011 年 12 月 26 日, 大
阪大学.

(4) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーが有界作
用素になるための滑らかさについて, 熊本大
学応用解析セミナー, 2011 年 11 月 19 日,
熊本大学.

(5) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーに対する
シャープな評価について, 月曜解析セミナー,
2011 年 11 月 7 日, 北海道大学.

(6) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーについて,
三大学偏微分方程式セミナー, 2011 年 10
月 26 日, 中央大学.

(7) N. Tomita,
On the L^p -boundedness of
pseudo-differential operators with symbols
of limited smoothness, ISAAC Congress
2011, 2011 年 8 月 24 日, Peoples' Friendship
University of Russia (Russia, Moscow).

(8) N. Tomita,
Sharp estimates for bilinear Fourier
multipliers, 調和解析と非線形偏微分方程式,
2011 年 7 月 4 日, 京都大学数理解析研究所.

(9) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーに対する
Hörmander 型の定理について, 数理科学
セミナー, 2011 年 3 月 9 日, 茨城大学.

(10) 富田直人,
多重線形フーリエマルチプライヤーに対す
る Hörmander 型の定理について, 神戸解析
セミナー, 2011 年 2 月 1 日. 神戸大学.

(11) 富田直人,
多重線形フーリエマルチプライヤーが有界
作用素になるための滑らかさについて, 調和

解析セミナー, 2010 年 12 月 25 日, 日本大
学.

(12) N. Tomita,
A Hörmander type multiplier theorem for
multilinear operators, Microlocal Day #2,
2010 年 12 月 3 日, Imperial College London
(England, London).

(13) 富田直人,
A Hörmander type multiplier theorem for
multilinear operators – 2, 実解析学シンポ
ジウム, 2010 年 11 月 12 日, 九州工業大学.

(14) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーが有界作
用素になるための微分回数について, 偏微分
方程式の諸問題, 2010 年 10 月 31 日, 東海
大学.

(15) N. Tomita,
On the L^p -boundedness of
pseudo-differential operators with symbols
of limited smoothness, Joint workshop on
PDE at Jinhua, 2010 年 9 月 28 日, Zhejiang
Normal University (China, Zhejiang).

(16) N. Tomita,
A Hörmander type multiplier theorem for
multilinear operators, International
Workshop “Fourier Analysis and Partial
Differential Equations”, 2010 年 6 月 14 日,
University of Göttingen (Germany,
Göttingen).

(17) 富田直人,
双線形フーリエマルチプライヤーが有界作
用素になるための微分回数について, 神楽坂
解析セミナー, 2010 年 1 月 23 日, 東京理科
大学.

(18) N. Tomita,
On the L^p -boundedness of
pseudo-differential operators with
non-regular symbols, Harmonic Analysis
and its Applications at Pohang 2009, 2009
年 11 月 26 日, Pohang University of Science
and Technology (South Korea, Pohang).

(19) N. Tomita,
On the L^p -boundedness of
pseudo-differential operators with
non-regular symbols, Harmonic Analysis
and Partial Differential Equations, 2009
年 9 月 30 日, Nagoya University.

(20) N. Tomita,

Unimodular Fourier multipliers on modulation spaces, 調和解析と非線形偏微分方程式, 2009年6月8日, 京都大学数理解析研究所.

(21) N. Tomita,
On the L^p -boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations with Applications, 2009年5月28日, Beijing Normal University (China, Beijing).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

富田 直人 (TOMITA NAOHITO)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 10437337