

機関番号：15201

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2009～2010

課題番号：21740099

研究課題名 (和文)

複素ハーディ空間の加群構造に関するトレース - ランク不等式についての研究

研究課題名 (英文)

A study on trace-rank inequality concerned with module structure of complex Hardy spaces

研究代表者

瀬戸 道生 (SETO MICHIO)

島根大学・総合理工学部・講師

研究者番号：30398953

研究成果の概要 (和文)：

(1) 複素ハーディ空間には自然に加群構造が入るため、ヒルベルト関数と呼ばれる関数が定義される。これまでヒルベルト関数の具体的な計算は困難であったが、本研究では、特別な場合にその明示公式を与えることができた。

(2) (1) を得る過程において得た知見と先行研究とを再検討した結果、ヒルベルト関数の重要な性質がある作用素の摂動論に関連することに気付いた。結果として、これまでの研究に作用素論、摂動論の種々の概念を持ち込むことが可能となり、研究の幅が格段に広まった。

研究成果の概要 (英文)：

(1) Since Hardy spaces can be seen as Hilbert modules over the polynomial ring, a Hilbert function can be defined for every submodule. We succeeded in giving an explicit formula for Hilbert functions of submodules in a certain class.

(2) As a sequel of (1), we introduced perturbation theory for linear operators to our research field. As a result, we have obtained a new viewpoint, which can be applied to other Hilbert function spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析、ハーディ空間論、作用素論、多変数作用素論

1. 研究開始当初の背景

(1) 問題の設定

多重円板上のハーディ空間には、通常の掛け算を作用として、多項式環を係数環とするヒルベルト加群の構造が入る (ここでのヒルベルト加群とは、単にヒルベルト空間に加群の構造が入っているものである)。その際、適当な位相で多項式環の閉包をとり、正則関

数からなる関数環が作用すると考えても、ヒルベルト加群としての構造は変わらないことに注意しておく。さて、本研究の研究対象は、多重円板上のハーディ空間のヒルベルト加群としての部分加群である。この部分加群は不変部分空間と呼ばれることも多い。ハーディ空間の部分加群の構造は、関数解析学的には、ヒルベルト空間上の線形作用素の

多様さを、複素解析学的には、ハーディ関数の零点と特異点の分布の複雑さを反映すると考えられている。この問題意識は、ある程度性質の良い正則関数からなる他のヒルベルト空間でも考えることが可能である（例：Bergman 空間、単位球上のハーディ空間など）。

本研究では、多重円板の場合を中心にハーディ空間の部分加群のランク、すなわち部分加群の生成系の最小濃度に関する問題（以下ではランク問題と総称する）に注目した。

(2) ランク問題の背景（先行研究との関係）

ここで、ランク問題の背景について、先行研究と本研究の観点とを比較しながら簡単に紹介する。

① Rudin の結果

1969 年、W. Rudin は、著書 “Function theory in polydiscs” の中で、多重円板上のハーディ空間の中で無限生成部分加群を構成した。それは、古典的な 1 変数の場合と比べ、非常にかけ離れた現象であったため、病的なものとして広く知られることとなった。この Rudin の無限生成部分加群についての研究は、D. N. Clark によるいくつかの結果を除いて、目立った進展が無いまま、30 年以上の歳月が過ぎる。

② 研究代表者の過去の結果

①で述べた状況の中、研究代表者は、これまで続けてきた研究から、Rudin の結果に別証明を与えることができ、さらに進んでより一般の部分加群に関するランクを評価できる不等式の存在を予感した。

③ Berger-Shaw の不等式

さて、ここで一般のヒルベルト空間上の作用素論に目を向けると、ランクに関連するある不等式が有名であった。それは Berger-Shaw の不等式である。Berger-Shaw の不等式とは、簡単に述べると、

「(可換子のトレース) \leq (巡回ベクトルの数) \times (スペクトルの面積)」

という型の不等式である。通常、可換子のトレースの大きさを上から評価する式と解釈されることが多いが、ヒルベルト加群の言葉では、巡回ベクトルの個数とはランクのことに他ならないので、

「(可換子のトレース) \leq (ランク) \times (スペクトルの面積)」

と考えても差し支えないことがわかる。また、見方を変えれば、

「可換子のトレースにより、ランクを下から評価する式」

と見ることもできる。この Berger-Shaw の不等式を参考にして、研究代表者はある不等式

を予想した。それが研究課題名の中でもあげたトレース - ランク不等式である。

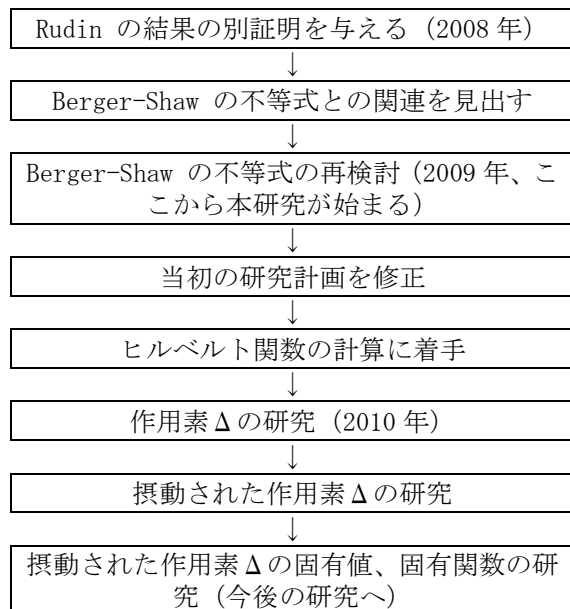
2. 研究の目的

本研究の目的は、ハーディ空間を多項式環係数のヒルベルト加群としてみるとき、その部分加群の構造を解明することである。特に、その部分加群のランク（生成元の個数）を評価する方法を与えることを最大の目的とする。本研究では Berger-Shaw の不等式を手本にさらに精密な不等式を得ることを目標としている。

3. 研究の方法

(1) 研究の流れ

当初予定していた研究方法に修正を加えた。その経緯を含めて時系列に以下の図で研究の方法を説明する。



(2) 具体的な研究方法の説明

研究の方法は大きく次の六つに分けられる。

① Berger-Shaw の不等式の再検討

Berger-Shaw の不等式のオリジナルの証明は決して読みやすいものとは言えず、簡略化された証明が知られている。ところが、その簡略化された証明は、single operator theory をふんだんに使った証明であり、むしろ読みづらいとされるオリジナルの証明の方にこそ multivariable operator theory を考慮できる余地があるように思える。もちろん、そのまま multivariable operator theory でも適用可能ということはないので、何らかの修正を考慮する必要がある。そこで、Berger-Shaw オリジナルの証明を本研究の観点から再検討することにした。

② 本研究で導入した新しいアイデア Berger-Shaw の不等式には含まれない、本研究のアイデアは

「座標変換に対し変化する量を、座標変換を変数とする関数とみなす」ことにある。従って、座標変換毎に不等式が得られ、座標変換を一斉に考えることでたくさんの情報が得られるであろうと期待している。これは、「1. 研究開始当初の背景」の②で得た知見である。例えば、円板の場合、複素解析学的に自然な座標変換は、変数の交換を除くと、メビウス変換により与えられ、それは円板の点をパラメーターとしてもつことを思い出していただきたい。

③ ヒルベルト関数の計算

当初予定していた研究方法が困難であることが判明したため、具体例におけるヒルベルト関数の計算により、経験を積むことを考えた。ヒルベルト関数の計算は一般には困難であることが知られているが、本研究では、研究代表者がこれまでの研究で得た、多重円板上のハーディ空間の良い部分加群の属に対して、ヒルベルト関数の明示公式を与えることに成功した。この結果、次の④へと続く着想が得られた。

④ 作用素 Δ

③においてヒルベルト関数を計算する過程で、原点に対応するヒルベルト関数の一次の値は、J. Agler や R. Yang により導入された作用素 Δ の固有値 1 に対応する固有空間の次元に他ならないことを知った。従って、同型写像（双正則写像）で Δ を摂動すれば、任意の点に対応するヒルベルト関数が、摂動された作用素 Δ の固有空間と対応することに気づいた。これは、②で述べたアイデアに関連して着想したものである。なお、この Δ は自己共役であり、摂動した後でも自己共役性が保たれるため非常に扱いやすい。

⑤ 摂動された作用素 Δ の研究

④で導入した作用素 Δ を、②の観点から同型写像（双正則写像）で摂動し、その影響を調べる。ただし、 Δ が Hilbert-Schmidt 級であることを仮定する。これは R. Yang の研究により十分に一般的な設定であることが示されており、本研究の観点から考えても妥当な条件であると思われる。さて、この設定で最初にすべきことは、同型写像による摂動で Δ を動かしても、それらが Hilbert-Schmidt の枠の中で納まっていることを証明することである。この事が示されれば、Hilbert-Schmidt 作用素に定義される行列式を用いて、固有値の動き方も解析できるようになる。

⑥ 摂動された Δ の固有値、固有関数の研究 自己同型写像の族により摂動された Δ たちはすべて自己共役であるが、可換ではないため、同時固有関数展開を考えることはできない。そこで、固有値、固有関数が摂動による受ける影響を調べる必要がある。幾何学的に述べれば、これは固有空間の全体がベクトル束になるかという問題である。

4. 研究成果

研究代表者が「研究目的」、「研究実施計画」の中で予想したトレース - ランク不等式の検証のためには、2009年度の研究を踏まえた結果、作用素 Δ を深く調べる必要を感じたため（むしろ Δ の言葉で記述されるというべきかもしれない）、研究の方向を当初のものから修正した。2010年度はその作用素の摂動の研究に集中して取り組んだ。その結果を以下に纏める。

① 成果

(1) 前年度に研究し報告したヒルベルト関数と加群のランクとの関係は、摂動された Δ の固有値、固有関数の性質に翻訳されることが判明した。

(2) さらに、これまでの研究に作用素論、摂動論の種々の概念を持ち込むことが可能となり、研究の幅が格段に広まった。これは今年度の研究成果の大きな意義である。この結果を論文 “A perturbation theory for core operators of Hilbert-Schmidt submodules” にまとめ、作用素論の専門誌である “Integral Equations and Operator Theory” に投稿し、採録が決定した。

(3) さらに強調したい重要な点として、上記の論文で与えた方法は、多重円板上の Hardy 空間だけではなく、良い再生核と良い自己同型写像が存在する再生核ヒルベルト空間（例：単位球上のハーディ空間、多重円板、単位球上の Bergman 空間、Drury-Arveson 空間）であれば議論することができることである。ここに一般論を展開できる可能性があり、現在研究を継続中である。

② 先行研究との比較

J. Agler のモデル理論において、ヒルベルト空間上に可換な作用素のペアが作用しているという設定の下、hereditary polynomial が導入された。これは、その後独立に R. Yang により core operator（又は defect operator と呼ばれることもある）として導入され、本報告書で Δ と表わした作用素と本質

的に同じものである。研究代表者は前年度までに得られた結果と先行研究とを検討し、多変数という設定では、考えている領域（スペクトル）の自己同型写像（双正則写像）で Δ を摂動した作用素全体を考える必要があるだろうということに気付いた。これは、先行研究にない発想である。今年度はその摂動による作用素の動き方を研究したことになる。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計3件）

①瀬戸 道生, A perturbation theory for core operators of Hilbert-Schmidt submodules, Integral Equations and Operator Theory (掲載確定), 査読：有

②瀬戸 道生, Infinite sequences of inner functions and submodules in $H^2(\mathbb{D})$, Journal of Operator Theory, 61 no. 1, 75-86, 2009年, 査読：有

③中路 貴彦, 瀬戸 道生, Common invariant subspaces of two doubly commuting operators on $\ell^2 \otimes \mathbb{C}^2$, Nihonkai Mathematical Journal, 20 no. 2, 127-137, 2009年, 査読：有

〔学会発表〕（計4件）

①瀬戸 道生, A perturbation theory for defect operators on Hilbert function spaces, 関数空間セミナー, 2010年12月23日, 北海道大学理学部

②瀬戸 道生, 再生核ヒルベルト空間から定まる defect 作用素について, 作用素論・作用素環論研究集会, 2010年11月13日, 東京理科大学森戸記念館

③瀬戸 道生, 再生核から定まる作用素の摂動について, 作用素論における非可換構造の研究とその応用, 2010年10月28日, 京都大学数理解析研究所

④ Michio Seto, Module ranks, Hilbert functions and defect operators of submodules in the Hardy space over the bidisk, 2009 Joint Meeting of the KMS and the AMS, 2009年12月17日, Ewha Womans University (Seoul, Korea)

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

瀬戸 道生 (SETO MICHIO)
島根大学・総合理工学部・講師
研究者番号：30398953

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

