

## 科学研究費助成事業 (科学研究費補助金) 研究成果報告書

平成 24 年 5 月 1 日現在

機関番号 : 17102

研究種目 : 若手研究 (B)

研究期間 : 2009 ~ 2011

課題番号 : 21740100

研究課題名 (和文) 流体運動を記述する双曲・放物型方程式系の解の時間漸近解析

研究課題名 (英文) Asymptotic analysis for systems of a hyperbolic-parabolic type appeared in fluid dynamics

研究代表者

中村 徹 (NAKAMURA TOHRU)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号 : 90432898

**研究成果の概要 (和文)** : 本研究では, 圧縮性粘性流体の様々なモデル方程式に現れる境界層解と呼ばれる定常波の存在性及び漸近安定性に関する研究を行った. 具体的には, 熱伝導理想気体モデルに対し流出及び流入境界条件の下, 境界層解の存在性及び漸近安定性を証明した. さらにこれらモデル方程式系を包括するような対称双曲・放物型連立系に研究対象を広げ, 境界層解の存在性に関する一般論の構築に成功した.

**研究成果の概要 (英文)** : In the present research, we consider an existence and an asymptotic stability of a boundary layer solution (stationary wave) for model systems of compressible and viscous gases. More precisely, we prove the existence and the asymptotic stability of boundary layer solution for an outflow and an inflow problems of heat-conductive model. Moreover, we show the existence of boundary layer solution for model systems of symmetric hyperbolic-parabolic type.

## 交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野 : 数物系科学

科研費の分科・細目 : 数学・基礎解析学

キーワード : 解析学, 偏微分方程式論, 流体力学, 圧縮性流体, 漸近解析, エネルギー法, 粘性保存則, 境界層解

## 1. 研究開始当初の背景

圧縮性粘性流体の運動を記述する偏微分方程式系には様々な形のもが知られているが、いずれも対称な双曲・放物型連立系に分類されるような非線形保存則系で与えられる。全空間領域における熱伝導圧縮性粘性流体のモデル方程式に対しては、定数状態の漸近安定性が松村・西田 ([A5]) によりエネルギー法を用いて示されている。解の安定性を示す際に重要となる方程式系の性質は消散構造であるが、一般の対称双曲・放物型連立系に対する消散構造の特徴付けは 1980 年代に主に川島等によって成された ([A1], [A2], [A7], [A8])。すなわち与えられた方程式系が安定性条件と呼ばれる条件を満たすならば、解は熱核のように振る舞い、時刻無限において定数状態に収束する。従って全空間における定数状態の安定性問題は、安定性条件の成立を調べることにより用意に解決出来るようになった。

一方半空間上の問題については、解の境界面に対する法線方向導関数の評価に困難さが伴うため、安定性条件の成立を調べただけでは安定性を得る為の解のアプリオリ評価を得ることは出来ない。その様な中で、松村・西田 ([A6]) は半空間領域での熱伝導モデルに対し、技巧的なエネルギー法を駆使することにより解のアプリオリ評価の導出に成功した。また半空間領域においては、無限遠方に与える定数状態と境界条件として与える境界値の関係に応じて様々な非線形波が解の漸近形として現れることが松村 ([A4]) によって予想されており、その中でも等エントロピーモデルに対する境界層解と呼ばれる定常波の存在性と安定性が川島等 ([A3]) によって証明されている。その一方で物理的にはより重要な熱伝導モデルに対する半空間領域での非線形波の安定性に関する結果はほとんど無く、このモデルに対する非線形波の安定性の証明、さらには一般的な対称双曲・放物型連立系への拡張が待たれていた。

[関連結果]

- [A1] S. Kawashima, *Systems of a hyperbolic-parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics*, Doctoral Thesis, Kyoto Univ. (1984).
- [A2] S. Kawashima, *Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **106** (1987), no. 1-2, 169-194.

- [A3] S. Kawashima, S. Nishibata, and P. Zhu, *Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), no. 3, 483-500.
- [A4] A. Matsumura, *Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas*, Methods Appl. Anal. **8** (2001), no. 4, 645-666.
- [A5] A. Matsumura and T. Nishida, *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 1, 67-104.
- [A6] A. Matsumura and T. Nishida, *Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), no. 4, 445-464.
- [A7] Y. Shizuta and S. Kawashima, *Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **14** (1985), no. 2, 249-275.
- [A8] T. Umeda, S. Kawashima, and Y. Shizuta, *On the decay of solutions to the linearized equations of electromagnetofluid dynamics*, Japan J. Appl. Math. **1** (1984), no. 2, 435-457.

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、圧縮性粘性流体のモデル方程式系を包括するような一般的な対称双曲・放物型連立系に対し、半空間上での初期値・境界値問題に現れる境界層解の存在性・安定性に関する数学的な証明を与えることにある。一般論の構築の為には具体的なモデル方程式での検証が必要不可欠である為、本研究ではまず熱伝導モデルに対して境界層解の存在性等を考察した後、対称連立系への一般化を試みる。具体的には以下の二つにまとめられる。

- (1) **熱伝導モデルに現れる境界層解** 本研究の第一の目的は 1 次元半空間上における圧縮性粘性流体の熱伝導理想気体モデルに対し流出及び流入境界条件を課し、境界層解の存在性と漸近安定性に関する数学的な証明を与えることである。
- (2) **対称双曲・放物型連立系への拡張** 第二の目的は、(1) での検証結果を踏まえ、一般的な対称双曲・放物型連立系を 1 次元半空間で考察し、特性速度が負となる状況における境界層解の存在性について考察する。

### 3. 研究の方法

(1) 熱伝導モデルに現れる境界層解 1次元半空間上の熱伝導モデルに対し、まず流出境界条件を課した問題に対する境界層解の存在性及び漸近安定性を証明した。まず存在性については定常問題を2本の方程式からなる連立常微分方程式系の境界値問題へと帰着し、平衡点におけるヤコビ行列の固有値を調べることにより解析した。特に0固有値を持つ縮退した場合においては、線形項を評価しただけでは解の存在性を議論することは不可能な為、さらに非線形項を詳しく評価し、中心多様体定理を適用することにより境界層解の存在性を示した。境界層解の漸近安定性についてはエネルギー法による摂動の一樣評価を導出することにより証明した。

続いて流入境界条件下での境界層解の存在性・安定性の証明に取りかかった。具体的な方法は流出境界条件下とほぼ同様であるが、双曲型方程式に対応する特性速度の符号が反転する為、密度の境界項の評価に困難が生じる。これを克服するため質量保存則の方程式を用いて密度の導関数を表現することにより一樣なエネルギー評価を導出した。

(2) 対称双曲・放物型連立系への拡張 1次元半空間における粘性的保存則系の定常問題を考察した。本方程式系の定常問題は1階の常微分方程式系に帰着され、ヤコビ行列の全ての固有値が負となる場合は無限遠方の定数状態は漸近安定平衡点となる為、初等的な力学系の理論により容易に解の存在を示すことが出来る。一方固有値の一つが0に縮退してしまう場合においては(1)の場合と同様、非線形項を評価し中心多様体定理を適用することで証明した。その際、0固有値が単純固有値であることと、対応する固有ベクトル場が真に非線形となる仮定が要求される。

### 4. 研究成果

(1) 熱伝導モデルに現れる境界層解 1次元半空間における熱伝導モデルの流出・流入問題に対し、境界層解の存在性及び漸近安定性に関する数学的証明を与えた。流出問題の結果は主に論文 [B3], [B4], [B5], 流入問題は論文 [B2] にまとめられている。境界層解の存在性を示す際に、境界層解の定量的空間減衰率をマッハ数の値に応じて算出した。特にマッハ数が1となる遷音速境界層解に

ついては、その縮退性により多項式的な空間減衰率しか求めることは出来ないが、定常問題に現れる局所中心多様体の凸性はプラントル数によって特徴付けられるという非常に興味深い性質を発見した。

続いて境界層解の漸近安定性を、エネルギー法を用いて摂動の一樣評価を導出することにより証明した。また流出問題における超音速・遷音速境界層解については、初期摂動に指数的または代数的減衰を仮定することにより、境界層解への時間漸近率を算出することに成功した。証明は主に時空間重み付きエネルギー法による。流速が遷音速となる場合はその縮退性の為、代数的な漸近率しか求めることが出来ないが、その漸近率の上限値には  $(1 + \sqrt{2})/2$  というこれまでの単独粘性保存則などの研究で得られた上限値を同じ値が現れることを発見した。

(2) 対称双曲・放物型連立系への拡張 空間1次元半空間上の対称双曲・放物型連立系に対し、境界層解の存在性を証明した。本結果をまとめた論文は現在投稿中であるが、講演論文 [B1] には本結果の要約が記載されている。先述の研究の方法で述べた通り、縮退境界層解の存在を保証するためには、定常問題に現れるヤコビ行列の0固有値に対応する固有ベクトル場が真に非線形となる必要があるが、この条件は元の非粘性連立系に現れる0特性速度場が真に非線形となる条件と同値であることを発見した。もしこの条件が成立せず0特性速度場が線形退化してしまうと、解の漸近形として接触不連続解など境界層解とは異なる非線形波が現れることが予想されるため、この条件は縮退境界層解の存在性を保証する本質的な条件であると考えられる。具体的な圧縮性流体のモデル方程式においてはこの条件は自然に満たされていたため、これまでの境界層解の解析においては本条件の本質的重要性は認識されておらず、本研究課題で一般の連立系を研究対象にしたことにより初めて発見された。従って本研究課題の果たした学術的貢献は非常に大きく、今後様々な非線形波の存在性及び安定性解析に広く発展してことが期待される。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計5件)

[B1] T.Nakamura and S.Nishibata, *Asymptotic*

- stability of stationary waves for symmetric hyperbolic-parabolic system*, 京都大学数理解析研究所講究録に掲載決定, 査読有り.
- [B2] T.Nakamura and S.Nishibata, *Stationary wave associated with an inflow problem in the half line for viscous heat-conductive gas*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 8 (2011), no. 4, 651–670, DOI: 10.1142/S0219891611002524.
- [B3] S.Kawashima, T.Nakamura, S.Nishibata and P.Zhu, *Stationary waves to viscous heat-conductive gases in half space: existence, stability and convergence rate*, Math. Models and Meth. in Appl. Sci., 20 (2010), No.12, 2201–2235, DOI: 10.1142/S0218202510004908.
- [B4] T.Nakamura, Y.Ueda and S.Kawashima, *Convergence rate toward degenerate stationary wave for compressible viscous gases*, Proceedings of NACA2009 (2010), 239–248, 査読有り.
- [B5] T.Nakamura and S.Nishibata, *Convergence rate toward planar stationary waves for compressible viscous fluid in multi-dimensional half space*, SIAM J. Math. Anal., 41 (2009), No.5, 1757–1791, DOI: 10.1137/090755357.
- [学会発表] (計 12 件)
- [C1] T.Nakamura, *Stationary wave to the symmetric hyperbolic-parabolic system in half space*, SIAM Conference on "Analysis of Partial Differential Equations", San Diego, California, USA, 2011 年 11 月 15 日.
- [C2] T.Nakamura, *Boundary layer solution to systems of viscous conservation laws in half space*, Third China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Northwest University, Xi'an, China, 2011 年 10 月 25 日.
- [C3] 中村 徹, 熱伝導圧縮性粘性流体に現れる境界層解の存在性と漸近安定性, 日本流体力学学会年会 2011, 首都大学東京, 2011 年 9 月 7 日.
- [C4] T.Nakamura, *Asymptotic stability of stationary waves for symmetric hyperbolic-parabolic system in half space*, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 7 月 8 日.
- [C5] T.Nakamura, *Boundary layer solution for compressible viscous and heat-conductive fluid in half space*, The 3rd Kyushu University-POSTECH Joint Workshop - Partial Differential Equations and Fluid Dynamics, POSTECH, Republic of Keora, 2011 年 6 月 17 日.
- [C6] T.Nakamura, *Inflow and outflow problems for compressible viscous and heat-conductive fluid*, Euskadi-Kyushu Workshop on Applied Mathematics, Basque Center for Applied Mathematics, Spain, 2011 年 3 月 10 日.
- [C7] 中村 徹, 半空間における圧縮性粘性流体の漸近挙動について, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会 特別講演, 名古屋大学, 2010 年 9 月 25 日.
- [C8] T.Nakamura, *Stationary waves for viscous heat-conductive gases in half line*, 13th International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications, Xijiao Hotel, Beijing, P.R.China, 2010 年 6 月 18 日.
- [C9] T.Nakamura, *Asymptotic stability of stationary waves for viscous heat-conductive gases in half line*, Second Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 九州大学, 2009 年 11 月 16 日.
- [C10] T.Nakamura, *Stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space*, RIMS 研究集会「流体と気体の数学解析」, 京都大学, 2009 年 7 月 9 日.
- [C11] 中村 徹, 西畑 伸也, 川島 秀一, P.C.Zhu, 半空間における熱伝導圧縮性粘性流体の定常波について, 第 58 回理論応用力学講演会, 日本学術会議, 東京, 2009 年 6 月 11 日.
- [C12] T.Nakamura, *Stationary waves for viscous heat-conductive fluid in half space*, International Conference on Kinetic and Related Models, Wuhan University, Wuhan, P.R.China, 2009 年 4 月 2 日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 徹 (NAKAMURA TOHRU)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号：90432898