

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 1日現在

機関番号：16401

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740101

研究課題名（和文） 分散型写像の幾何解析

研究課題名（英文） Geometric analysis of dispersive flow

研究代表者

小野寺 栄治 (ONODERA EIJI)

高知大学・教育研究部自然科学系・准教授

研究者番号：70532357

研究成果の概要（和文）：

コンパクトな概エルミート多様体上の曲線流を記述するある空間1次元3階非線型分散型偏微分方程式の初期値問題を主に考察し、初期値問題の一意可解性と幾何学的設定との関係を調べた。この方程式は多様体値写像の誘導束の断面がみたす分散型偏微分方程式の一種であり、複素数値関数がみたす分散型偏微分方程式に対する解法と非線型偏微分方程式に対する幾何解析の方法を応用することにより初期値問題の解法研究を進めた。

研究成果の概要（英文）：

The initial value problem for a third order nonlinear dispersive curve flow on compact almost hermitian manifolds was mainly investigated. The relationship between the unique solvability of the initial value problem and the geometric setting was studied. Some methods of solving one-dimensional dispersive equations for complex valued functions and geometric analysis of nonlinear partial differential equations were applied to solve the initial value problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：分散型偏微分方程式、初期値問題、幾何解析

1. 研究開始当初の背景

(1) 渦糸運動や古典スピン系の連続体近似モデルの幾何学的一般化として知られるシュレーディンガー写像流の方程式は、コンパクトリーマン多様体またはユークリッド空間からコンパクトケーラー多様体への写像の時間発展を記述するある非線型シュレーディンガー方程式として定式化される。1990

年代以降、この偏微分方程式の初期値問題の解法研究が進んでおり、この設定下で初期値問題が時間局所的に一意可解であることや、特に定義域が実数直線または1次元トーラスで像空間が局所エルミート対称空間であるならば解が時間大域的に存在することは良く知られている。

(2) 渦糸運動のある種の高次近似モデルを、コンパクトなケーラー多様体上の曲線流がみたす3階及び4階の空間1次元非線型分散型偏微分方程式として一般化することができる。高階の分散型写像流の研究の第一歩として、本研究代表者はこの3階の方程式の初期値問題の解法研究を進めた。特に、この設定下で初期値問題が時間局所的に一意可解であることが証明された。また、特に多様体が定曲率リーマン面でありかつ方程式の各項の係数同士がある関係をみたすならば、適当な時間保存量が存在することにより、解が時間大域的に延長可能であることが証明された。

(3) 上記(1), (2)の研究においては写像の像空間がケーラー多様体であることが仮定されており、このケーラー性により方程式を対称双曲系のように取り扱うことが可能であった。一方で、2008年頃になりシュレーディンガー写像流の方程式についてはこの仮定が緩和され、像空間がコンパクトな概エルミート多様体であっても初期値問題が時間局所的に一意可解であることが証明された。実際、概複素構造の共変微分による反対称な1階項が一般には消えないため、古典的エネルギー法による解法は機能しないが、ある種の擬微分作用素を用いてゲージ変換をうまく構成することによりこの困難は克服された。本研究代表者はこの先行研究の方法に習って(2)の3階の方程式の考察に着手し、像空間のケーラー性を仮定せずとも初期値問題が時間局所的に一意可解であることはわかった。

2. 研究の目的

(1) これまでの研究を継続し、上述の曲線流がみたす3階の1次元非線型分散型偏微分方程式の初期値問題に関してより詳しく研究を進める。まず、解が時間大域的に延長可能であるための像空間の多様体に対する条件について調べる。先行研究では多様体の曲率と方程式の各項の係数同士に関するある仮定のもとで時間大域解の存在が示されていたが、本研究ではこれらの仮定の緩和可能性を調べる。状況に応じて、有限時刻で解が適当な意味で爆発するような多様体の例を考察することも検討する。可能ならさらに方程式の完全可積分系性と多様体に対する幾何学的設定との関係を調べる。

(2) 曲線流がみたすある4階の1次元非線型分散型偏微分方程式の初期値問題の解法研究を進める。この方程式については従来この方面で考察されていた2階と3階の分散型写像流の方程式とは異なり、多様体にケーラー性を仮定しても1階と2階の可微分性の損失

が生じるため、これらの低階項の構造を詳細に解析する必要がある。もし可能ならこれらの曲線流に限らず、曲面流を記述する分散型偏微分方程式などの他の具体例についても考察を進める。

3. 研究の方法

研究全般を通じて、偏微分方程式の理論と非線型方程式に対する幾何解析の方法の融合が重要な役割を果たすと思われた。特に、偏微分方程式系としての構造と幾何学的設定との関係を明らかにすることは証明の方法も含めて研究進捗の見通しを明快にすると思われた。この本質的部分については必要に応じて複素数値関数の線型分散型偏微分方程式またはその系の可解性に関する一般論や非線型分散型偏微分方程式の時間大域的存在に関する先行研究等を大いに参考にした。一方で、解の像空間である多様体が線型空間でない等の理由により、証明を与える際にスカラー値関数の偏微分方程式の研究にはない技術的困難が伴うことが想定された。この点については、自身の先行研究で利用した方法や非線型幾何解析に関する論文や書籍を手掛かりにして解決をはかった。また、非線型分散型偏微分方程式の可積分系性と幾何学的設定との関係を調べる際には、可積分系理論についての書籍や論文を通じて情報収集を試みた。また、2011年度にはRIMS短期共同研究集会の研究代表者となる機会をいただいたので、その機会に幾何解析と微分方程式に関する幾つかの話題について学んだり情報収集を行ったりした。また、研究成果の発表の機会をいただいた際には、発表時の議論やコメントを参考にして有意義なものに出来るようにつとめた。これらの他にも必要と時間に応じて偏微分方程式、幾何解析並びに可積分系理論に関わる研究集会やセミナーに出席して情報収集を行う等した。

4. 研究成果

(1) コンパクトな概エルミート多様体上の閉曲線流がみたす3階の空間1次元非線型分散型偏微分方程式の初期値問題が時間局所的に一意可解であることの証明を与えた論文が査読付き雑誌に公表された。解の空間変数の定義域に対応する1次元トーラスのコンパクト性により実数直線上の3階分散型偏微分方程式の局所平滑化効果を利用することはできないが、ある種の擬微分作用素を用いて誘導束の断面に作用するゲージ変換を構成することにより反対称な1階項を相殺しエネルギー法を機能させることが可能であった。また、この結果を2009年度のセミナーや研究集会で発表させていただく過程で、ゲージ変換をより簡易な形で構成できることもわかった。これらの研究成果は千原浩之氏（鹿

児島大学)との共同研究によるものである。また、これらの研究の進捗状況を踏まえて、定義域が実数直線の場合についての初期値問題の解法を論文にまとめ直し、査読付き雑誌に公表した。この論文では実数直線上の3階分散型偏微分方程式の局所平滑化効果を十分に引き出すことにより反対称な1階項を解消する解法を与えた。

(3)多様体がコンパクトな定曲率リーマン面であるときと局所エルミート対称空間であるときのそれぞれの場合に関して、その多様体上の曲線流がみたす3階非線型分散型偏微分方程式の初期値問題の時間大域解の存在定理を与えた。いずれの場合も方程式の各項の係数同士の関係を仮定しないので方程式は一般に非可積分系であるものの解は時間大域的に存在する場合に該当することがわかった。実際、曲線流の方程式と複素数値関数がみたすある定数係数の1次元3階非線型分散型偏微分方程式との対応に着目し、ある種の擬保存量を発見することにより解の先験的評価が得られた。この成果についても論文にまとめ査読付き雑誌に公表した。一方で、曲率への仮定の緩和可能性の考察や方程式の完全可積分系性と方程式の係数と多様体の設定との関係の特徴づけも試みたが、十分な理解を得るには至らなかった。

(4)コンパクトなケーラー多様体上の曲線流がみたすある4階非線型分散型偏微分方程式の初期値問題を考察した。1階と2階の可微分性の損失の克服が本質的な課題であったが、定義域が実数直線の場合については4階分散型方程式の局所平滑化効果を引き出すことにより時間局所的に一意可解であることがわかった。この研究成果は千原浩之氏(鹿児島大学)との共同研究によるものである。一方、定義域が1次元トーラスである場合も考察し、多様体が曲率に関するある仮定をみたすならば時間局所解が存在することがわかった。さらにこの偏微分方程式の構造に関してより詳しく検討を行なった。これらについてはまだ公表には至っていないが、今後、解の一意性や時間大域的延長可能性についても調べたうえで論文にまとめて公表したい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Eiji Onodera,
A Curve Flow on an Almost Hermitian Manifold Evolved by a Third Order

Dispersive Equation,
FUNKCIALAJ EKVACIOJ, 55 (2012),
pp. 137-156, 査読有

- ② Eiji Onodera,
A remark on the global existence of a third order dispersive flow into locally Hermitian symmetric spaces,
Communications in Partial Differential Equations, 35 (2010), pp. 1130-1144, 査読有

- ③ Hiroyuki Chihara and Eiji Onodera,
A third order dispersive flow for closed curves into almost Hermitian manifolds,
Journal of Functional Analysis, 257 (2009), pp. 388-404, 査読有

[学会発表] (計9件)

- ① 小野寺 栄治,
A third order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds,
Linear and Nonlinear Waves No. 9,
2011年11月4日,
ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター

- ② 小野寺 栄治,
A third order dispersive flow into almost Hermitian manifolds,
非線形解析セミナー,
2011年7月1日,
慶応大学

- ③ 小野寺 栄治,
A third order dispersive flow into almost Hermitian manifolds,
若手のための偏微分方程式と数学解析,
2011年2月17日,
九州大学

- ④ 小野寺 栄治,
A third order dispersive flow into almost Hermitian manifolds,
数理科学セミナー,
2010年3月22日,
茨城大学

- ⑤ 小野寺 栄治,
A third order dispersive flow into almost Hermitian manifolds,
研究集会「微分方程式の総合的研究」,
2009年12月19日,
東京大学

- ⑥ 小野寺 栄治,

The initial value problem for a third order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds,
NLPDE セミナー,
2009年7月10日,
京都大学

⑦ 小野寺 栄治,

The initial value problem for a third-order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds,
名古屋微分方程式セミナー,
2009年6月15日,
名古屋大学

⑧ 小野寺 栄治,

A third-order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds,
RIMS 共同研究「非線形双曲型および分散型方程式の解の挙動について」,
2009年5月26日,
京都大学

⑨ 小野寺 栄治,

The initial value problem for a third-order dispersive flow into compact almost Hermitian manifolds,
微分方程式セミナー,
2009年5月15日,
大阪大学

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

<http://www.math.kochi-u.ac.jp/onodera/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小野寺 栄治 (ONODERA EIJI)
高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号：70532357