様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月１８日現在

機関番号：３４３１０
研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2009～2012
課題番号：２１７４０１０７
研究課題名（和文）　複素幾何光学解の解析に基づく数学的逆問題とその理工学への応用

研究課題名（英文）　Mathematical inverse problems based on analysis of complex geometrical optics solutions and the applications to science and engineering

研究代表者
多久和　英樹（TAKUWA HIDEKI）
同志社大学・理工学部・准教授
研究者番号：80403111

研究成果の概要（和文）：
本研究は、楕円型とは限らない一般の方程式に対する複素幾何光学解の構成をすることで、この解の深い理解を目指し双曲型方程式に対する新しい問題の考察を行ったものである。特に、新しいカーレマン評価式の導出がなされ、その一つの応用として、ローレンツ計量化での逆問題解析を行ったものである。その結果、双曲型方程式に対する複素幾何光学解の応用という意味で本質的に従来とは異なる考察をすることができた。

研究成果の概要（英文）：
We have studied the special solutions to the mathematical inverse problems. These solutions are called complex geometrical solutions, in short, CGO solutions.
It was known that we could succeed to apply CGO solutions with linear complex phase functions to many problems. Recently new CGO solutions with nonlinear complex phase functions have been studied. But this new approach was restricted to the problems about elliptic equations as Laplace equations. So no one has understood the meaning of CGO solutions with nonlinear phase functions in general cases. In this research program we have studied new CGO solutions with nonlinear phase functions which can be applicable to general equations including hyperbolic equations. More precisely, we can derive new nonlocal Carleman estimates. By using this estimate we can study Lorentian metric and operators associated it. This is the new inverse problem related to hyperbolic equations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	700,000	210,000	910,000
２０１１年度	700,000	210,000	910,000
２０１２年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：逆問題、複素幾何光学解、擬リーマン幾何学、カーレマン評価式

１．研究開始当初の背景

偏微分方程式論において超局所解析的手法、特に複素相関数をもつ複素幾何光学解を用いた、理工学、医工学に応用上不可欠な数学的逆問題の理論の構築を目指す。
逆問題は、数学分野のみならず、理学、工学分野にわたった共通の話題である。身近な例として、人体の内部の癌などの特定部分を

同定する、つまり体表の観測データから内部の情報を得る問題がある。この問題は Calderon Problem といわれる数学的逆問題に密接に関連している。詳しく述べると、最も簡単な形における Calderon Problem とは, ラプラス方程式にポテンシャルを表す低階項が加わった方程式を考えたときに、境界上における解の値（またその導関数）の情報、つまり境界上の観測データから方程式の低階項（内部情報であるポテンシャル）を決定する問題（係数同定逆問題）と言える。また数学的逆問題が現れる例として、医療 CT, MRI 等の医療装置の基本原理があるが、このような非破壊検査は現代社会で不可欠になっている。本研究テーマは、このような非破壊検査を含む数学的逆問題の理論構築とその応用を目指したものである。

ただし、通常の偏微分方程式論とは異なり、偏微分方程式の係数等が与えられた場合に解の性質を調べる順問題ではなく、解の一部の情報から定まる観測データから偏微分方程式の係数等を決定する問題として定式化される。特に、解の大域的な性質と方程式の持つ複雑に絡まった構造を抜き出す必要がある点で数学的には未解決で困難な多くの問題を含んでいる。

1980 年に Calderon が偏微分方程式論における複素幾何光学解と現在呼ばれる解を用いて逆問題解析の画期的な考察を始めたことが重要であった。その後 30 年近く多くの研究がなされてきた。ただし従来の研究は、個々の問題に大きく依存する方法を用いており、さらにそれらが数学的、より詳しく偏微分方程式論や微分幾何学の理論とどのように関連しているのかが解明されてはいなかった。

2005 年辺りに Kenig-Sjostrand-Uhlmann 等によってなされ始めた研究が画期的であった。従来は定数係数の楕円型の特別な場合であるラプラス方程式に対して構成されていた複素幾何光学解の構成法を発展させ、偏微分方程式論的な背景を踏まえ線形ではない非線形な複素相関数を構成する手法を提案した。この応用として表面の観測データから内部構造を決定するのに必要な仮定を大幅に弱めることに成功した。

本研究は、数学的逆問題のこの新しい流れから派生したものである。特に、双曲型方程式などを例に含む広い枠組みはこのときには全く先行研究は見受けられなかった。つまり、楕円型方程式や双曲型方程式の個々の問題が別々に考察されていた背景があり、理論の統合が待たれていたと言える。

２．研究の目的

偏微分方程式論における数学的逆問題解析に現れる複素幾何光学解を定数係数楕円型方程式に限らず、一般の偏微分方程式に適用できるように理論を拡張する。特に、波動方程式などを例に含むより広い枠組みを提唱し、従来には扱えなかった逆問題を解析することを目指す。

それに伴い期待される偏微分方程式論における大域解析に必要な新手法を提案し、個々の問題の解析にとどまらず、偏微分方程式の解の構造を明らかにすることも目標としている。また、偏微分方程式論に留まらず、幾何構造を明らかにする点で微分幾何学特にリーマン幾何学に対する応用や新理論の提案も目的とする。

３．研究の方法

大きく分けて下記の４点の実現を目指し研究を進めた。

１．複素幾何光学解の構成方法の確立
２．数学的逆問題への応用
３．一般の双曲型理論に対する複素幾何光学解の構造解析
４．数値解析等による理論の応用に対する検証と数学理論へのフィードバック

より具体的には次の項目に分けられる：

① 系統的な複素相関数と振幅関数の構成方法
② 適用できる作用素の範囲(条件)の決定
③ 複素幾何光学解の(本質的な)種類の分類
④ 適応できる数学的逆問題の提案
⑤ この理論に基づく具体的な逆問題の解法の提案
⑥ 数値解析を含めたアルゴリズムの提案と検証

４．研究成果

大きく分けて、次の３つの結果を得た

(1)擬リーマン計量に付随した複素相関数の構成法の確立と新しい複素幾何光学解の構成

(2)新しい非線形複素相関数に対する複素幾何光学解を構成するための新しいカーレマン評価式の提案

(3)ローレンツ計量下での Calderon Problem の定式化とその新手法の提案

この研究計画は国際的な共同研究に発展し、Wang 氏(台湾)、Ferreira 氏(フランス)、Kurylev 氏(ロシア), Rousseau 氏(フランス)の４名の共同研究として進展することとなった。

まず(2)に関して, 変数係数楕円型作用素に対しては変数係数の場合も含め、Kenig-Sjostrand-Uhlmann またその後の多くの研究で様々なカーレマン評価式が提案されている。今回の本研究では、2 階変数係数実主要型と呼ばれる一般的な枠組みでの新しいカーレマン評価を得ることができた。複素幾何光学解に現れる相関数は limiting Carleman weight と呼ばれる条件を満たすものである。カーレマン評価を保証する超局面の擬凸性が退化する場合にあたり、この枠組

みでカーレマン評価式を導出することは従来から困難な問題であった。さらに、Lerner-Robbiano およびHormander等の局所的に限定された手法に基づく先行研究があるだけと言ってよい。しかもこれらの研究は1985年頃に得られた結果であり、その後本質的な進歩はなかった。逆問題の性格上、局所的とは限らない有界領域程度の広い範囲まで成り立つ評価が必要である。今回、Hormander の評価をさらに精密化し、従来は応用が大変困難であった、大きな領域におけるカーレマン評価を楕円型方程式や双曲型方程式等をすべて含む実主要型方程式、さらに変数係数の場合も含めてカーレマン評価を導出することができた。これらの結果は発表のために準備中である[2]にまとめられている。さらに副産物として，偏微分方程式の解の一意性に関する応用を得ることも可能である。

(3) に関して研究開始後、申請者の研究のみならず変数係数楕円型作用素に対する研究が進んだ。それらの結果はリーマン多様体上のラプラス・ベルトラミ作用素に対する逆問題として一般化された。そこでは、2 階楕円型作用素に対しては空間次元が 3 以上の場合､本質的には６種類の limiting Carleman weight しか存在しえないことが示された。ただし双曲型に関する研究は今回の研究で得られた擬リーマン計量に付随した擬距離で定まる非線形複素相関数以外に得られたものはない。 結果は(1)としてまとめられているが、最初の速報版として現在はレクチャーノートの形[1]でまとめられ，[3]の参考文献中にあるようにその後の発展版は[3]に含まれる予定である。この理論の応用例の一つとして，ミンコフスキー計量もしくはローレンツ計量下での偏微分方程式の逆問題としてまとめられている。変数係数双曲型方程式を含むこの枠組みでの複素幾何光学解の逆問題への応用が新しい点であると言える。

現在準備中の論文など：

[1] Takuwa, Construction of limiting Carleman weights of radial type for operators of second order, unpublished notes.

[2] Ferreira-Rousseau-Takuwa, Nonlocal Carleman estimates for operators of real principal type of second order under weak pseudo convexity

[3] Ferreira-Kurylev-Rousseau-Takuwa, A first glimpse into Lorentzian inverse problems

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① 浦部治一郎・押目頼昌・多久和英樹・櫻井翔太，一次元熱方程式における熱源決定逆問題，同志社大学理工学研究報告，52 号，査読無，2011 年 11 月，87-92

〔学会発表〕（計２件）

① Hideki Takuwa, A class of weak pseudo convexity and Carleman estimate for operators of real principal type, TAIWAN-JAPAN Joint Conference on PDE and Analysis , 2012 年 12 月 28 日, National Taiwan University (Taipei, Taiwan)

② Hideki Takuwa, A note on the construction of a class of limiting Carleman weights, 2010 Taiwan-Japan Joint Workshop on Inverse Problems 2010 年 11 月 21 日, National Taiwan University (Taipei, Taiwan)

〔その他〕（論説計１件）

多久和英樹，常微分方程式の境界値問題の固有関数展開，数学セミナー，vol. 51 no12, 614, 2012 年 12 月，pp20-pp23

６．研究組織

(1)研究代表者

多久和　英樹（TAKUWA HIDEKI）

同志社大学・理工学部・准教授

研究者番号：80403111