様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　４月１９日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：若手研究（B）
研究期間：２００９～２０１２
課題番号：２１７４０１１４
研究課題名（和文）　結晶基底およびその超離散可積分系への応用

研究課題名（英文）　Crystal bases and their application to ultradiscrete integrable systems

研究代表者
坂本　玲峰（Reiho Sakamoto）
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号：３０５２８０５５

研究成果の概要（和文）：
無限次元代数の表す対称性を理解しようとするとき、一つの方法として代数が作用する自然な基底を見出すという問題が考えられ、しばしば他の数理物理学の模型との思いがけない関連が見出される。アフィン量子群の結晶基底の場合では超離散ソリトン系の典型例である箱玉系が対応する。箱玉系の作用角変数の空間（艤装配位）はアフィン量子群の対称性を反映した基底となり、例えば対称性を表す代数自身の持つ対称性といった深い性質に関しても著しく良い振る舞いをすることが解明された。

研究成果の概要（英文）：
When we try to understand the nature of an infinite dimensional algebra, one possible way is to find a natural basis which reflects deep properties of the algebra. Such a research sometimes brings an unexpected connection with another model in mathematical physics. In the case of the crystal bases of the quantum affine algebra the corresponding model is a typical example of the ultra-discrete soliton models called the box-ball system. The set of the action and angle variables of the box-ball systems, called the rigged configurations, serves as a natural basis which has a nice property even if we consider such deep property like the symmetry of the algebra of the symmetry.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1000000	300000	1300000
２０１０年度	800000	240000	1040000
２０１１年度	800000	240000	1040000
２０１２年度	800000	240000	1040000
年度			
総　計	3400000	1020000	4420000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学、大域解析学
キーワード：アフィン量子群・可積分系・代数的組み合わせ論・艤装配位・結晶基底・箱玉系

１．研究開始当初の背景
(1)量子可積分系における Bethe 仮説法の研究から艤装配位(rigged configurations)と呼ばれる概念が Kerov-Kirillov-Reshetikhin (1986)によって発見された。艤装配位は Kostka 多項式に対する Fermi 型公式と呼ばれる恒等式の証明やアフィン量子群の有限次元表現を対応する有限次元代数に制限し

た時の分岐則の記述などに応用された。この場合艤装配位はそれぞれの表現に対するラベルとして活用されたことになる。この方向の研究は Kirillov-Schilling-Shimozono (1999)によって集成され、A 型の場合の艤装配位の最も基本的な部分に関する進展がみられた。その後 Schilling-Shimozono 等によって結晶基底（Kirillov-Reshetikhin クリスタル）との関連が詳しく調べられ、特に A 型以外の非例外型アフィン量子群に関する艤装配位の理論の構築が開始された。

(2)以上とは全く異なる進展として、箱玉系と呼ばれる超離散ソリトン系との関連が Kuniba-Okado-Sakamoto-Takagi-Yamada (2006)によって発見された。特に艤装配位は箱玉系の作用角変数の空間に他ならないことが認識され、その後箱玉系に関する懸案の問題が次々と解決された。艤装配位に関して本質的な進展は、表現のラベル（すなわち最高ウェイトベクトル）の範囲を超えて表現のすべてのベクトルに対する艤装配位にも明瞭な数学的意味が存在することが認識された点にある。

２．研究の目的
以上の背景のもとで箱玉系の作用角変数である艤装配位が表現の基底となっていることは分かったが、この様な数理物理学に由来する基底を考えることが実際に学問上の発展となっているかを確認するためには艤装配位の数学的性質を更に深く研究する必要があり、本研究課題の主な目的として設定した。

３．研究の方法
研究の初期段階ではまずどのような新しい数学的現象が存在するのかを知るためにコンピューターによる大規模な数値実験を含め試行錯誤した。理論の核心部となるのは Kirillov-Reshetikhin (KR)クリスタルの元と艤装配位の間の全単射、すなわち艤装配位写像である。今までの研究の積み重ねにより既にある程度の経験があるので、その経験を生かして研究を進めた。

自分が持ち合わせている以外の数学や数理物理学上の成果との関連を知るためには他の研究者との交流が何より重要であり、その為に研究費を活用して国内外への出張を行った。新しい現象を発見できた場合は証明する必要があるが、本研究課題の場合は通常極めて精緻な組み合わせ論的考察が要求され、証明自体も通常非常に長大なものとなった。

４．研究成果
(1) 既に背景として述べたように A 型の場合の艤装配位については既にある程度の知見が得られているが、それ以外の代数に関してはまだよく分かっていないことが多かった。従って艤装配位の理論が真にアフィン量子群の対称性の理解に役立つものであるかを確認するためには A 型以外の艤装配位の理論を構築する必要がある。

本研究課題における主要な成果の一つは D 型の場合の艤装配位に関し以下に述べるようないくつかの基本的な進展を見たことである。

①D 型の場合の艤装配位写像の具体的な予想を得た。この際主要な進展は、D 型 KR クリスタルの元を表示するタブローとして通常の Kashiwara-Nakashima タブロー（古典 A 型代数の場合のヤングタブローの拡張）ではなく長方形の形をしたアフィン量子群に特有と思われる新しいタブロー表示（KR タブローと呼ぶ）を定義した。艤装配位写像は KR タブローによる KR クリスタルのテンソル積の元の表示と艤装配位の間に定義される。特にテンソル積が一つだけの場合に写像が実際に正しいものであることを証明した。

②D 型の KR クリスタルの代数構造は、対応する有限次元代数に対する Kashiwara 作用素にアフィン Kashiwara 作用素を付け加えて得られる。真に理解を深めるべき対象は後者の作用素である。2008 年に Schilling はアフィン柏原作用素を初めて実現したが、その際プラスマイナスタブローと呼ばれる組み合わせ論的対象との非自明な全単射が登場する。既に以前の筆者らの研究によりプラスマイナスタブローは組み合わせ R 行列と呼ばれる表現論的量と深い関係にあることが分かっていたが、今回実はプラスマイナスタブローは艤装配位と同等のものであったことが分かった。

具体的には、アフィン Kashiwara 作用素の実現では Dynkin 図の０番目と１番目の頂点（Kac の流儀による）を入れ替えるような代数の対称性を実現することが核心部であったが、そのような対称性は艤装配位上で自然に（線形に）実現されていることが分かった。この様に代数にとって本質的に重要な対称性が艤装配位を用いることによって自然に理解できることが分かった事は、艤装配位がアフィン量子群の対称性の理解にとって避けることのできない一つの道具を提供している事を表している。

③D 型艤装配位写像が D 型の有限次元代数に対する Kashiwara 作用素と可換であることを証明した。これは艤装配位写像が正しく代

数構造を維持していることを表しており基本的に重要な結果である。証明には極めて精緻な組み合わせ論的考察が要求され、実際証明は１００ページを超える長大なものとなった。この結果は艤装配位写像の最も深い性質、すなわち艤装配位写像は組み合わせＲ行列を自明化するという事実をＤ型の場合に証明するために有力な手段を提供するものと期待している。

(2)一般の非例外型代数ｇに対する艤装配位に関して次の驚くべき写像を発見した。ここでは艤装配位は最高ウェイトの場合に限る。ｇ型の結晶基底のテンソル積の元が与えられたとする。ただし与えられた元に対し代数ｇのランクは十分大きいとする。その時対応するｇ型艤装配位とＡ型艤装配位および Littlewood-Richardson (LR) タブローとの間に自然な全単射が存在する。ここで LR タブローは、複素数体上の一般線型群の表現の規約分解の問題が可能な LR タブローを数え上るという問題に帰着される（その意味では LR タブローと同等な他のモデルを使用することも可能である）という古典的に広く知られた性質のために既に多くの研究が積み重ねられてきた対象であるが、今回は複雑な定義を持つ LR タブローそれ自身が写像のレコーディングタブローとして極めて自然に現れた点が興味深い。

数値実験によればこの全単射はＤ型代数の持つもう一つの対称性、すなわち Dynkin 図の０番目の頂点とｎ番目の頂点を入れ替える対称性に対応しており、表現論的に深い起源を持っていることが予想される。このような写像を艤装配位を用いずに構成しようとすると多大な困難が存在することが米国の数学者 Shimozono 氏によって 2005 年に指摘されていた。またこの全単射の構成は全ての非例外型代数について普遍的なものであり、また構成法よりこの様な現象が起こるための代数のランクに関する必要十分条件を厳密に導出できる事を注意しておく。

(3)通常の箱玉系は「玉」と呼ばれる Fermi 粒子から構成される物理系であった。今回箱玉系の拡張として Bose 粒子を含む物理系を発見し、Box-Basket-Ball（BBB）系と名付けた。ここで Fermi 粒子と Bose 粒子の間には非自明な相互作用が存在する。BBB 系は米国の数学者 Lam 氏および Pylyavskyy 氏によってＡ型の組み合わせＲ行列の拡張として導入された whurl 関係式と呼ばれる写像を離散化することによって得られた。BBB 系は可積分な系であり、かつソリトン系となっていることを証明した。後者の結果は非自明な結果であり、Fermi 粒子および Bose 粒子からなる可能な孤立波の詳細な解析が必要となる。

(4)いわゆる一次元状態和（またはエネルギー関数）について実験的な研究をした。Ｄ型の場合に一次元状態和を用いて箱玉系の状態を記述できること、およびＡ型の場合に Macdonald 多項式の記述でこれまで知られていなかった記述を提案した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Masato Okado, Reiho Sakamoto, Anne Schilling: "Affine crystal structure on rigged configurations of type D_n^(1)" Journal of Algebraic Combinatorics 37 (2013) 571--599.査読有

② Thomas Lam, Pavlo Pylyavskyy, Reiho Sakamoto: "Box-Basket-Ball Systems" Reviews in Mathematical Physics 24 (2012) 1250019 [23 pages].査読有

③ Masato Okado, Reiho Sakamoto: "Stable Rigged Configurations for Quantum Affine Algebras of Nonexceptional Types" Advances in Mathematics 228 (2011) 1262--1293.査読有

④ Anatol N. Kirillov, Reiho Sakamoto: "Generalized Energy Statistics and Kostka- Macdonald Polynomials" Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science AN. (2010) 343--354. 査読有

〔学会発表〕（計１３件）

① R. Sakamoto: “A survey on the box-ball systems” A Workshop on Algebraic Combinatorics related to Young diagrams and Statistical Physics, (2012, 8, 6) International Institute for Advanced Study, Kyoto.

② 尾角正人、坂本玲峰, A. Schilling: “D^{(1)}_n 型艤装配位のいくつかの話題について”(2012, 3, 29) 東京理科大学神楽坂

③ R. Sakamoto: “A survey on the box-ball systems” Combinatorics Seminar (2012, 3, 16). University of Michigan, USA.

④ 尾角正人、坂本玲峰:"艤装配位の安定化と Littlewood-Richardson タブロー”日本数学会.(2011,3,21). 早稲田大学理工学術院

⑤ T. Lam, P. Pylyavskyy, 坂本玲峰: “Box-basket-ball systems” 日本数学会.

(2011,3,21). 早稲田大学理工学術院
⑥ R. Sakamoto: "Box-basket-ball systems" Integrable systems in Suzuka. (2011,2,18). 鈴鹿医療技術大学
⑦ 坂本玲峰:"Virasoro 代数入門" 理科大素粒子原子核セミナー.(2010,11,26). 東京理科大学
⑧ 坂本玲峰: "Stable rigged configurations and Littlewood-Richardson tableaux" Combinatorial Representation theory and its applications. (2010,10,22). RIMS, Kyoto University
⑨ R. Sakamoto: "The X=M conjecture/ theorem for large rank" Algebra and discrete mathematics seminar. (2010,9,7). Mathematics Department, University of California, Davis, USA
⑩ R. Sakamoto: "Combinatorial aspects of the box-ball systems" Schubert Calculus Workshop. (2010,7,12). Fields Institute, Toronto, Canada
⑪ 尾角正人、坂本玲峰:"D^(1)_n, B^(1)_n, A^(2)_2n-1 型 Kirillov- Reshetikhin クリスタルの組み合わせ R 行列" 日本数学会.(2009,9,24). 大阪大学
⑫ A. N. Kirillov, R. Sakamoto: "艤装配位と 10-elimination" 日本数学会. (2009,9,24). 大阪大学
⑬ R. Sakamoto: "Kirillov-Schilling-Shimozono bijection as energy functions of crystals" Kobe Seminar on Integrable Systems. (2009,7,17). 神戸大学

〔図書〕(計１件)
① A. Kuniba, R. Sakamoto, Y. Yamada : "Generalized energies and integrable D^{(1)}_n cellular automaton" in "New Trends in Quantum Integrable Systems" (World Scientific 2011) p221--242

〔その他〕
ホームページ等
http://demonstrations.wolfram.com/PeriodicBoxBallSystem/

６．研究組織
(1)研究代表者
坂本 玲峰 (Reiho Sakamoto)
東京理科大学・理学部・助教
研究者番号：３０５２８０５５

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：