

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年3月5日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740116

研究課題名（和文） 化学・生物学に現れる放物型方程式系の定常パターンとダイナミクスの研究

研究課題名（英文） Study on stationary patterns and dynamics of parabolic partial differential equations arising in chemistry and biology

研究代表者

宮本 安人（MIYAMOTO YASUHIRO）

東京工業大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：90374743

研究成果の概要（和文）：化学や生物学に現れるノイマン境界条件下における楕円型の非線形偏微分方程式について、解の存在や解の個数やモース指数を明らかにした。また、発生生物学におけるモデル方程式 Gierer-Meinhardt 系の境界付近に沿ってピークが移動する現象の詳しい解析を行った。

研究成果の概要（英文）：We studied the number and the Morse indices of the solutions of nonlinear elliptic partial differential equations arising in chemistry and biology, and clarified the solution structures. We also made a detailed analysis of a peak moving along the boundary in Gierer-Meinhardt system.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：楕円型方程式・放物型方程式・非線形現象

1. 研究開始当初の背景

楕円型偏微分方程式の解の構造に関して、ディリクレ問題の正値解については既に多くの研究があったが、符号変化解やノイマン問題に関しては、何らかの方法で次元問題に帰着する場合を除いて、大域的なことはほとんど知られていなかった。また、生物学に現れる放物型方程式系については、境界の平均曲率が最大となるところにピークを持つ解が安定であることは知られていたが、ピークが境界上の他の場所にある場合のダイナミクスについては知られていなかった。

2. 研究の目的

次元問題に帰着できない問題に対して、大域的な分岐構造を明らかにする。特に、ディ

リクレ問題の符号変化解や、ノイマン問題の非定数解が非有界な分岐の枝を持つことを示す。さらに、二次分岐の存在や非存在について明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 楕円型微分方程式の研究については、2次元領域の場合は、偏導関数の零等高線を用いる。この方法により、従来は難しかった1次元的な解以外の解からなる枝の大域的性質を調べることが出来る。さらに、この方法を用いて、安定性（モース指数）と解の形状との関係についても調べる。多次元領域における非自明解からの分岐については、特異摂動法を用いる。これによって、今まで困難だった「横断性条件」を確かめることが可能

になる。

(2) 放物型方程式系のダイナミクスに関しては、中心多様体縮約を用いる。これによって、定常解から離れた関数を初期関数を持つ解の詳しいダイナミクスの解析が可能となる。

4. 研究成果

成果は大きく2つに分かれる：(1) 楕円型方程式の解の構造、(2) 放物型方程式のダイナミクス

(1) モデル方程式で頻出する非線形楕円型方程式のノイマン問題において、非自明解の大域的分岐構造を研究した。具体的には、一般次元の球領域において、第2固有値から分岐する非球対称解からなる分岐解の枝は非有界であることを、任意の非線形項に対して示した。さらに2次元円板領域の場合は、第3固有値からの分岐解の枝も非有界であることを示し、非線形項がChafee-Infante型である場合には、第2固有値からの分岐の枝が二次分岐しないことを示した。モデル方程式に頻出する非線形項 $f(u) = -u + u^p$ の場合に、矩形領域と円環領域において、境界に凝集する解からなる滑らかな枝の存在を示し、その枝上に無限個の対称性破壊分岐点の存在を特異摂動法を用いて示した。

ディリクレ問題に対しては、主に符号変化解について研究した。必ずしも凸とは限らない2次元対称領域について、Chafee-Infante型問題の第2固有値からの分岐解の枝の非有界性と、2次分岐点の非存在を示した。さらに、 $f(0) = 0$ を満たす一般の非線形項について、2次元円板領域では、自明解からなる枝上に、非球対称解からなる非有界な枝を持つ分岐点が無数存在することを示した。

2次元円板領域上、任意の非線形項を持つフェーズフィールドモデルの安定定常解の形状を研究し、安定解は等高線が領域を2つの単連結領域に分割することを示した。

必ずしも対称とは限らない2次元凸領域について、ノイマンラプラシアン第2固有関数の形状を研究し、2次元凸領域のあるクラスについて、ホットスポット予想を肯定的に解決した。

(2) 生物学の形態形成に現れる放物型方程式系のモデル方程式 Gierer-Meinhardt 系の shadow 系について研究した。特に初期関数として境界にピークを持つものを選んだとき、時間と共に境界の平均曲率が大きくなるように境界に沿ってピークが移動することを明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- ① S.-I. Ei, K. Ikeda, and Y. Miyamoto, Dynamics of boundary spike layer, Communications on Pure and Applied Analysis, 査読有, 11, 2012, 115-145.
 - ② Y. Miyamoto, Asymptotic transversality and symmetry breaking bifurcation from concentrating solutions, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, 査読有, 29, 2012, 59-81.
 - ③ Y. Miyamoto, Global branches of sign-changing solutions to a semilinear Dirichlet problem in a disk, Advances in Differential Equations, 査読有, 16, 2011, 747-773.
 - ④ Y. Miyamoto, Global bifurcation and stable two-phase separation for a phase field model in a disk, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 査読有, 30, 2011, 791-806.
 - ⑤ Y. Miyamoto, Nondegeneracy of the second bifurcating branches for the Chafee-Infante problem on a planar symmetric domain, Proceedings of the American Mathematical Society, 査読有, 139, 2011, 975-984.
 - ⑥ Y. Miyamoto, Global branches from the second eigenvalue for a semilinear Neumann problem in a disk, Journal of Differential Equations, 査読有, 249, 2010, 1853-1870.
 - ⑦ Y. Miyamoto, The "hot spots" conjecture for a certain class of planar convex domains, Journal of Mathematical Physics, 査読有, 50, 2009, No. 103530.
 - ⑧ Y. Miyamoto, Non-existence of a secondary bifurcation point for a semilinear elliptic problem in the presence of symmetry, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, 357, 2009, 89-97.
 - ⑨ Y. Miyamoto, Global branches of non-radially symmetric solutions to a semilinear Neumann problem in a disk, Journal of Functional Analysis, 査読有, 256, 2009, 747-776.
- [学会発表] (計12件)
- ① 宮本安人, 境界に凝集する解からの対称性破壊分岐について, 日本数学会2012年度年会, 東京理科大学, 2012年3月27日
 - ② Y. Miyamoto, Stable patterns and solutions with Morse index one, 日仏合同会議 Modeling and Analysis in the Life Sciences, 東京大学, 2011年11

月 29 日

- ③ 宮本安人, 円板領域上のフェーズフィールドモデルの安定解の形状と大域的分岐構造について, 日本数学会秋季総合分科会, 信州大学, 2011 年 9 月 28 日
- ④ Y. Miyamoto, Stable patterns and solutions with Morse index one, 4th MSJ-SI, 九州大学, 2011 年 9 月 12 日
- ⑤ Y. Miyamoto, Nonradial maximizers for a Henon type problem and symmetry breaking bifurcations for a Liouville-Gelfand equation with a vanishing coefficient, 2nd Italian-Japanese Workshop Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, コルトナ (イタリア), 2011 年 6 月 23 日
- ⑥ Y. Miyamoto, The “hot spots” conjecture for a certain class of planar convex domains, International Workshop on PDE: Concentration and Related Topics in Nonlinear Problems, 東北大学, 2010 年 11 月 22 日
- ⑦ 宮本安人, 2 次元対象領域における Chafee-Infante 問題の分岐解の非退化性について, 日本数学会秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010 年 9 月 24 日
- ⑧ Y. Miyamoto, Stable patterns and solutions with Morse index one, 35th 偏微分方程式札幌シンポジウム, 北海道大学, 2010 年 8 月 23 日
- ⑨ 宮本安人, 対称性を持たない 2 次元凸領域におけるホットスポット予想について, 日本数学会 2011 年度年会, 慶應義塾大学, 2010 年 3 月 25 日
- ⑩ Y. Miyamoto, Stable patterns for shadow systems and a nonlinear hot spots conjecture, 2nd Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDEs, 明治大学, 2009 年 12 月 3 日
- ⑪ 宮本安人, Neumann 問題の 2 次分岐点の非存在について, 日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学, 2009 年 9 月 25 日
- ⑫ Y. Miyamoto, Stable patterns for shadow systems and a nonlinear “hot spots” conjecture, 1st Italian-Japanese workshop Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, 東北大学, 2009 年 6 月 16 日

⑬

6. 研究組織

(1) 研究代表者
なし

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし