様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　５日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009　～　2012
課題番号：21740117
研究課題名（和文）
凸多面体に付随する幾何学的漸近解析の諸問題の研究
研究課題名（英文）　Problems on geometric asymptotic analysis over convex polytopes

研究代表者
楯　辰哉（TATE TATSUYA）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：00317299

研究成果の概要（和文）：
凸多面体のうち頂点が格子点であるものを格子凸多面体というが、一般の格子凸多面体内の格子点によって定義されるリーマン和の漸近展開公式を、一般の滑らかな関数に対して得ることが出来た。これは Berline-Vergne による多項式のリーマン和の局所 Euler-Maclaurin 公式の一般化に相当する。また格子凸多面体が Delzant 条件を満たす場合に漸近展開の第三項の明示公式を得た。
研究成果の概要（英文）：
A convex polytope is said to be a lattice polytope if each vertex is a lattice point. An asymptotic expansion formula for the Riemann sums of general smooth functions over lattice polytopes was obtained. This formula is regarded as a generalization of the so-called local Euler-Maclaurin formula due to Berline-Vergne. Furthermore, an explicit formula for the third term in the expansion was obtained in case where the polytope is Delzant.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：幾何学的漸近解析学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：幾何学的漸近解析・凸多面体・リーマン和・トーリック多様体・ランダム行列理論・量子ウォーク・エータ関数

１．研究開始当初の背景
格子凸多面体はトーリック多様体と対応し、その格子点はトーリック多様体上の複素直線束の正則切断と対応する。このような視点に立って、本研究課題の数年前トーリック多様体上の複素直線束の正則切断の漸近挙動を Zelditch 氏そして Shiffmann 氏とともに調べた。また、格子凸多面体は Weyl 群の軌道の閉包としてコンパクトリー群の表現論において重要な役割を果たす。この視点に立ってコンパクトリー群の既約表現のテンソル表現内のウェイト重複度や既約表現の重複度の漸近挙動を Zelditch 氏とともに研究した。また、さらにコンパクトリー群の既約表現のテンソル積から派生する行列積分のテンソル積パラメータを無限大にする極限のもとでの漸近挙動を Stolz 氏とともに研究した。
これらの研究において凸解析や確率論で知られている概念を凸多面体に応用し、さらに

漸近解析的な視点を付加した手法が共通して現れていた。この共通した手法をさらに昇華すべく本研究を計画した。計画当初、研究の中心的な課題は格子凸多面体上の格子点から定まるリーマン和の漸近展開公式、そしてコンパクトリー群の増大列に対するランダム行列理論の一般化であった。これら当初の問題について以下でその背景を解説する。
⑴　Delzant 条件と呼ばれる、対応するトーリック多様体が滑らかになるための条件を満たす格子凸多面体に対して、Euler-Maclaurin 型の漸近展開公式は既に Guillemin-Sternberg により証明されていた。（彼らはもう少し一般の単純な格子凸多面体というクラスの凸多面体に対して漸近公式を証明している。）Guillemin-Sternberg が凸多面体上の格子点から定まるリーマン和を考察したもともとの動機は、トーリック多様体上のある種のテープリッツ型作用素のトレースがそのようなリーマン和で書き表すことが出来る、という点にあり、プランク定数に対応したパラメータがリーマン和の分割の細かさを表すパラメータとなっており、その漸近解析は数理物理的に重要であったという背景がある。これに対して Zelditch が全く異なる手法により、しかし Delzant 条件を仮定して漸近展開公式を得ていた。さらにそれらとは独立な方向性で Berline-Vergne が多項式に対するリーマン和の局所 Euler-Maclaurin 公式と呼ばれる等式を得ていた。Berline-Vergne の公式は漸近公式ではなく、多項式に対するリーマン和の明示公式を与えたが、より一般の滑らかな関数に対しては適用できない。また Guillemin-Sternberg の Euler-Maclaurin 型漸近公式は一般の関数に対して適用できるものの、各項の明示公式を得るのは困難な形をしている。さらに Zelditch の公式においてはトーリック幾何学を用いているため計算は困難であるが、その手法は見通しの良いものであった。このように、一般の格子凸多面体に適用でき、かつ計算可能な各項の明示公式を得るための見通しの良い手法を得るという課題があった。
⑵　ランダム行列理論においては、行列の固有値の分布を、例えばエルミート行列やユニタリ行列などの、ある行列のクラス全体で平均をとり、その行列のサイズを無限大にしたときの漸近挙動を調べる。これを、一般のコンパクト群の部分群の増大列で、適当な性質を持っているようなものに対して拡張する、という問題をかねてから念頭に置いていた。これは Stolz 氏との共同研究において大変興味深い行列積分を考察したが、そのテンソル積パラメータについての極限ではなく、より複雑な「行列のサイズを大きくする」極限を考察すべきであり、そうすることにより、幾何学的な性質も豊かになるであろうと考えてのことであった。

２．研究の目的
当初の目的は、格子凸多面体上の格子点から定義される、一般の滑らかな関数に対するリーマン和の漸近展開公式を得ること、そしてコンパクトリー群のしかるべき性質をもつ増大列に対してランダム行列理論で知られる固有値分布の漸近公式を拡張すること、であった。これらについて、以下でより具体的に説明する。
⑴　第一の問題の具体的な目的は、Zelditch の手法（というよりアイデア）を一般の格子凸多面体に生かし、さらに Berline-Vergne の公式を一般化する形で、Euler-Maclaurin 型の漸近展開公式を得ることであった。Zelditch のアイデアとは、まず格子凸多面体上で Bernstein 多項式と呼ばれる、関数を近似する多項式の類似物を構成し、それを積分することによりリーマン和を表現すれば、あとは Bernstein 多項式の漸近展開が得られればリーマン和の漸近展開もまた得ることが出来る、というものである。また、Berline-Vergne の局所 Euler-Maclaurin 公式とは、凸多面体上の多項式関数のリーマン和の明示公式で、ある無限次の微分作用素の凸多面体の各面上の積分の和によりリーマン和を記述するというもので、これらの微分作用素のシンボルが位相幾何学的にも重要な役割を果たし、かつ計算可能な公式であった。しかし、この局所 Euler-Maclaurin 公式は多項式関数にしか適応できず、より広範な応用を考えれば、これを一般化する方向への研究が重要であった。一方 Zelditch に先立ち Guillemin-Sternberg も Euler-Maclaurin 型の漸近公式を得ていたことは先に述べたが、この公式は、先の Berline-Vergne 同様無限次の微分作用素を用いるだけでなく、その公式は（原理的に美しいのと対照的に）具体的な計算が大変困難なものであった。本研究の目的は Guillemin-Sternberg の得た漸近公式の各項の明示公式を Berline-Vergne の局所 Euler-Maclaurin 公式と同様の局所公式によって得ることであった。
⑵　一般のコンパクト群の増大列を取り扱うのは、ランダム行列理論の論理的なメカニズムが理解されていない現在では、まだ無謀な試みである。そこで既に知られている特殊ユニタリ群の増大列についての Hiai-Petz の大偏差原理型定理に対して、Weyl の分母（差積）のサブレベルセットの体積の増大度を調べることにより、別証明を付けることを目的としていた。

３．研究の方法
上記の二つの問題に対する研究の手法につ

いて、以下で具体的に説明する。
⑴　格子凸多面体上のリーマン和の漸近展開公式については、まず凸錐体に対して同様の問題を Zelditch のアイデアを生かして証明することであった。Zelditch のアイデアは前項で説明した。Zelditch は、このアイデアの主軸となる Bernstein 多項式の類似物をトーリック多様体上の Bergman 核を用いて構成している。従ってその漸近展開公式は、Bergman 核の漸近公式を用いて得ることが出来る。しかし、Bergman 核は滑らかなトーリック多様体でなければその漸近挙動は十分に知られておらず、従って Delzant 凸多面体に対してのみ有効な手法であった。一般の格子凸多面体に対しては一般に特異点のあるトーリック多様体が対応するため、この手法は一般には用いることが出来ない。また、一般の格子凸多面体上の Bernstein 多項式の別の意味での類似物を本研究課題代表者は本研究課題の直前に考案し考察・分類していた（出版されたのは、本研究課題中である）が、それは積分しても一般にリーマン和が現れず、リーマン和が現れるのは非常に特殊な状況のみであることが分かり、リーマン和の漸近展開公式を得るには至らなかった。しかし格子の整数基底から生成される凸錐体（単純な凸錐体）に対しては凸錐体上の Szasz 関数の類似物を用いることにより、リーマン和の漸近展開を同様のアイデアで得ることができる。一般の格子凸錐体に対しては、幾つかの単純な凸錐体に分割し個別の単純な凸錐体に対してリーマン和の漸近展開公式を書き下し、さらにそれの交代和を取ることにより、一般の格子凸多面体のリーマン和の漸近展開公式を得るという手法を取った。この結果、漸近展開公式の各項には、ある幾つかの有限次数の微分作用素の様々な面上での積分が現れること、そしてそこに現れる微分作用素の明示公式が得られること、さらにその微分作用素は Berline-Vergne による局所 Euler-Maclaurin 公式に現れる無限次数の微分作用素の斉次部分となっていることなどを証明できた。また、漸近展開の第一項は凸多面体上での積分が現れることは自明であるが、Zelditch は第二項に境界での積分が現れることを示している。本研究課題代表者は、上記の公式を用いて第三項の明示公式を得ることができた。
⑵　Weyl の分母のサブレベルセットの体積の増大度を調べることにより Hiai-Petz の大偏差原理型の定理の別証明を付けるべく考察した。サブレベルセットの増大度については、凸解析的な手法により、ある程度見通しの良い評価は得ることが出来ることがわかった。この評価式自身は、抽象的なコンパクト群の増大列に対しても得られるものと、今でも期待している。しかし、大偏差原理を得ることが出来るほどのシャープな評価を得るところまでは至っていない。残念ながら Hiai-Petz の大偏差原理を、ユニタリ群の特殊性をなるべく使用することなしに得るところまでは、評価が思うようには改善されなかった。

４．研究成果
上記に述べた通り、漸近的 Euler-Maclaurin 公式の明示公式を得ることが出来た。今回得られた漸近的 Euler-Maclaurin 公式は既存にある様々なリーマン和の漸近公式のどれよりも効果的であると自負している。後述するように数々の研究集会において結果を公表した。上記で説明してきた目的のうち、ランダム行列理論の一般化への試みについては未だ出版に至った成果は残念ながら得られていない。しかし、本研究課題においては、離散幾何解析学との接点を模索する、ということも視野に入れていたが、凸多面体上の漸近解析学の手法を生かした問題をいくつか新たに見いだした。量子ウォークと呼ばれる、ランダムウォークの非可換類似物の研究、そしてエータ関数と呼ばれる、スピン多様体上のスピノル束の切断に作用するディラック作用素のスペクトルの情報から得られるゼータ関数の類似物（正確にはデデキントのエータ関数の類似物）である。前者については砂田利一氏との共同研究（下記雑誌論文の①）において一次元量子ウォークの遷移確率の漸近挙動が完全に解明したばかりでなく、一次元量子ウォークの代数構造とハミルトン作用素を記述することに成功した。前者については既に論文で公表している。（掲載も決定したが、巻数などが決定していないため、次項には掲載していない。）また、後者のエータ関数については、特に Euler-Maclaurin 公式を用いて三次元レンズ空間の Berger 計量についてのエータ関数の解析接続を具体的に表示することに成功し、それを用いて原点での特殊値、並びに幾つかの極での留数を計算することに成功した。三次元多様体のエータ関数の具体的な解析接続の公式、原点での特殊値、そして幾つかの極における留数の計算について、我々は現在のところハイゼンベルグ多様体の計量の族に対して成功しており、これとレンズ空間に対する結果をまとめて現在論文を作成中である。なおエータ関数の研究は宮崎直哉氏（慶應義塾大学）、本間泰史氏（早稲田大学）との共同研究である。以上のように、ランダム行列理論について成果があがらなかったことは残念であるが、その他の面について重要な成果を得ることが出来、大変有意義な研究期間であった。
５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Toshikazu Sunada and Tatsuya Tate, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, Journal of Functional Analysis, 262(2012), 2608-2645, 査読有.
② Tatsuya Tate, Problems on asymptotic analysis over convex polytopes, Travaux Mathematique 19, Universite de Luxembourg, 査読有, 2011年, 65-96.
③ Tatsuya Tate, Asymptotic Euler-Maclaurin formula over lattice polytopes, Journal of Functional Analysis 260(2011), no.2, 501-540, 査読有.
④ Tatsuya Tate, A spectral analogue of the Meinardus theorem on asymptotics of the number of partitions, Asymptotic Analysis 67(2010), no.1-2, 101-123, 査読有.
⑤ Tatsuya Tate, Bernstein measures on convex polytopes, in Spectral analysis in geometry and number theory, 295-319, Contemporary Mathematics 484, American Mathematical Society, 査読有.

〔学会発表〕（計１９件）

① 楯辰哉, “One-dimensional quantum walks”, 第８回代数・解析・幾何学セミナー, 2013年2月18日, 鹿児島大学
② 楯辰哉, “Asymptotics of quantum walks on the line”, Workshop of “Quantum Dynamics and Quantum Walks”, 2012年11月24日, 自然科学研究機構岡崎コンファレンスセンター.
③ 楯辰哉, “一次元量子ウォークに対する弱収束定理の簡単な証明”, 福岡大学微分幾何研究会「Geometry and Something」, 2012年11月3日, 福岡大学セミナーハウス.
④ 楯辰哉, “Asymptotics of quantum walks on the line”, 研究集会「確率解析とその周辺」, 2012年10月25日, 名古屋大学.
⑤ 楯辰哉, “Asymptotic behavior of quantum walks on the line”, 研究集会「確率論と幾何学」, 2012年10月20日, 大学コンソーシアムやまがたゆうキャンパス.
⑥ 楯辰哉, “量子ウォークの数理”, 研究集会「物質科学の数学的手法と数理物理」, 2012年6月17日, 理化学研究所.
⑦ 楯辰哉, “一次元量子酔歩に対するPlancherel-Rotach 型の漸近公式”, 応用数学連携フォーラム第 27 回ワークショップ, 2012年4月20日, 東北大学情報科学研究科
⑧ 楯辰哉, “A formula of Plancherel-Rotach type for quantum walks on the line”, 第11回名古屋国際数学コンファレンス “Topology and Analysis on Foliations”, 2012年3月24日, 名古屋大学.
⑨ 楯辰哉, “A formula of Plancherel-Rotach type for quantum walks on the line”, 研究集会 “Mathematical approach to emerging topics in material science 2012”, 2012年2月18日, 東北大学.
⑩ 楯辰哉, “量子酔歩に対するPlancherel-Rotach 型公式”, 研究集会「量子化の幾何学 2011」, 2011年11月19日, 早稲田大学.
⑪ 楯辰哉, “A formula of Plancherel-Rotach type for quantum walks on the line”, 福岡大学微分幾何研究会「Geometry and Something」, 2011年11月4日, 福岡大学セミナーハウス.
⑫ 楯辰哉, “Asymptotic Euler-Maclaurin formula over lattice polytopes”, DFG-JSPS Seminar, “Lie Groups: Geometry and Analysis”, 2011年9月9日, Universitat Paderborn, Germany.
⑬ 楯辰哉, “Asymptotic Euler-Maclaurin formula over lattice polytopes”, Long Term Workshop on “Geometry and Analysis”, 2011年3月17日, 京都大学.
⑭ 楯辰哉, “Asymptotic Euler-Maclaurin formula over lattice polytopes”, International Conference “Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects”, 2010年12月17日, 京都大学数理解析研究所.
⑮ 楯辰哉, “Euler-Maclaurin expansion over Delzant polytopes”, 福岡大学微分幾何研究会「Geometry and Something」, 2010年10月8日, 福岡大学セミナーハウス.
⑯ 楯辰哉, “Asymptotic Euler-Maclaurin expansion over Delzant polytopes”, AMS-SMM 8th International Meeting at Berkeley, Special Session “Toeplitz Operators and Discrete Quantum Models”, 2010年6月4日, University of California, Berkeley, USA.
⑰ 楯辰哉, “Asymptotic Euler-Maclaurin formula over Delzant polytopes”, 研究集会「ポテンシャル論とベルグマン核」, 2009年12月3日, 京都大学数理解析研究所.

⑱ 楯 辰 哉, “An asymptotic Euler-Maclaurin formula for Delzant polytopes”, Third International Conference on Geometry and Quantization, 2009 年 9 月 10 日, Universite de Luxembourg, Luxembourg.

⑲ 楯 辰 哉, “Problems on asymptotic analysis over convex polytopes”, International School on Geometry and Quantization, 2009 年 9 月 1 日, 3 日, 4 日, University of Luxembourg, Luxembourg.

〔図書〕（計１件）

M.Kotani, H.Naito and T.Tate, Eds., “Spectral analysis in geometry and number theory”, Contemporary Mathematics 484, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

なし。

６．研究組織

(1)研究代表者

楯　辰哉　(TATE TATSUYA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：00317299

(2)研究分担者

なし　(　)

研究者番号：

(3)連携研究者

なし　(　)

研究者番号：