

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 25 日現在

機関番号：12613

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009 年度～2012 年度

課題番号：21740123

研究課題名（和文）パンルヴェ方程式と無限可積分系の幾何学的研究

研究課題名（英文）Geometric study of Painlevé equations and infinite integrable systems

研究代表者

津田 照久 (TSUDA TERUHISA)

一橋大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号：00452730

研究成果の概要（和文）：

UC 階層とは、一般線形群の普遍有理指標に付随する無限可積分系で、KP 階層の拡張を成す。UC 階層の相似簡約が Fuchs 型線形常微分方程式の等モノドロミー族を記述することを示した。得られた非線形偏微分方程式はパンルヴェ第 VI 方程式やガルニエ系の自然な拡張を与え、さらに多項式ハミルトン系による統一的な表示を持つことを示した。特殊解として多変数超幾何関数が見れるが、付随する線形系は古典的なガウスの超幾何方程式の多変数化・高階化として、rigid 局所系の良い具体例を与えており興味深い。

研究成果の概要（英文）：

The UC hierarchy is an extension of the KP hierarchy, which is an infinite-dimensional integrable system associated with the universal rational character of the general linear group. Through a similarity reduction we derive from the UC hierarchy a class of the Schlesinger systems including the Garnier system and the sixth Painlevé equation, which describes the monodromy preserving deformations of Fuchsian linear differential equations with certain spectral types. We also present a unified formulation of the above Schlesinger systems as a polynomial Hamiltonian system and their particular solutions in terms of a certain generalization of Gauss' hypergeometric function.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：パンルヴェ方程式，可積分系，超幾何関数

## 1. 研究開始当初の背景

古典的なパンルヴェ微分方程式の起源は、20世紀初頭の P. パンルヴェ等による、動く特異点は高々極に限るという性質、即ち、パンルヴェ性を持つような2階代数的常微分方程式の分類という解析学的な問題に遡る。そこには微分方程式を使って新しい特殊関数、特に楕円関数の一般化を指向する時代背景があった。のちに、R. フックスやL. シュレジンガー等による線形常微分方程式のモノドロミー保存変形としての導出や、ソリトン系等の無限次元可積分系の簡約との対応、乱雑行列理論との関係等、解析学のみならず、表現論やモジュライ理論とパンルヴェ方程式の繋がりも次第に明らかになってきた。

研究代表者が2002年に発表したUC階層も、元々は全てのパンルヴェ微分方程式をKP階層のような1成分のソリトン理論の枠組みで捉えることを一つの動機として、構成された無限次元可積分系である。加えて、UC階層が普遍指標(シューア関数のヤング図形の二つ組に付随する拡張、一般線形群の既約有理式表現の指標)の特徴づける可積分系であることから、パンルヴェ方程式と一般線形群の表現論、あるいは対称多項式の理論、との関係に新しい視座が与えられた。

一方で、有理曲面あるいは有理代数多様体の上に作用するクレモナ変換群(双有理変換群)が $q$ -差分類など離散版をも含んだパンルヴェ型方程式の時間発展の幾何学的な起源であることが分かっている。この立場から見ると、パンルヴェ型方程式の解に普遍指標が現れることは非常に不思議な現象と考えられる。その理解を幾何学的見地から深める事は重要な課題である。

## 2. 研究の目的

パンルヴェ方程式(あるいはモノドロミー保存変形方程式)、及び、その背景にある無限次元可積分系を対象に、それらとヤング図形の組み合わせ論や表現論などとの関係についての基礎的な理論を構築する。

## 3. 研究の方法

研究の進行には主なものとして、有理代数多様体の代数幾何学、無限次元リー環の表現論、線形常微分方程式の変形理論、(離散)力学系の手法を用いる。

## 4. 研究成果

(1) KP階層は、ソリトン理論において最も重要な位置を占める非線形偏微分方程式系であり、自然数の重みの時間発展を持つ斉次な無限次元可積分系を与える。それに対して、UC階層は「KP階層の斉次性を保ったまま負の重みの無限変数を付け加えた拡張」ということができる。

本研究において、UC階層に斉次性と周期性を課して得られる有限次元可積分系がモノドロミー保存変形を記述することを示した。詳しくは、パンルヴェ第VI方程式やガルニエ系を含んだシュレジンガー系のある族が自然に導出される。例えば、パンルヴェ第VI方程式の線形補助問題のうち最も標準的なリーマン球面上4つの確定特異点を持つ2階線形常微分方程式の変形問題は、UC階層に由来することが分かる。UC階層の波動函数から対応する線形常微分方程式の特異点でのスペクトル型も分かる。また、得られた非線形系に対し、多時間・多重ハミルトン系としての統一的な表示を与えた。ハミルトニアンは正準変数の多項式とできる。UC階層の立場からこの多項式ハミルトン系について様々な知見が得られた。例えばタウ函数と広田双線形表示、ラックス形式、双有理変換の対称性、普遍指標による代数的な特殊解などである。もちろん同様の構造は不確定特異点型の場合も成り立つ。

(2) 上述のハミルトン系の相空間は一般に複雑な代数多様体である。ところが、系の含む定数パラメタが特別な値の場合、時間発展で集合として不変な部分多様体を持つ。この部分多様体は、元の相空間の丁度半分の次元の複素射影空間で、実際、ガウスの超幾何函数のある一般化によって、この特殊解(リッカチ解)は具体的に記述されることを示した。なお、この特殊函数は、良く知られたガウスの超幾何函数の多変数化(アペル・ロリチェラのFD)と高階化(トマエの一般超幾何)を巧く補間するものであり、そのrigidityの証明や接続問題、特殊値の数論的研究等、新しい研究課題をも提供している。このリッカチ解の近傍でのハミルトン系の解を調べることも興味深い課題であろう。

また、この特殊解に付随するフックス型線形常微分方程式は、可約となっていて、その解(波動函数)は当該の超幾何函数に関係したスティルチェス測度による(コーシー核)積分表示を持つことも分かった。この事実は、直交多項式や有理函数近似の理論との繋がりを強く示唆するものであり、今後も継続して研究すべき主題である。

(3) 離散パンルヴェ方程式は、アフィン・ワイル群の双有理作用に由来する離散力学系と看做せる。通常、平行移動部分群の作用を用いるが、実はそれだけでは全ての古典的パンルヴェ微分方程式に対し、離散的対応物が得られない。本研究ではアフィン・ワイル群の平行移動とは限らない無限位数の元的作用を適当な部分格子上に射影することで、離散パンルヴェ方程式を構成する方法 (projective reduction) を提案した。さらに、この手法によって、いくつかの離散パンルヴェ方程式のタウ函数に観察されていた奇妙な行列式構造の理由を解明した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件) 全て査読あり。

① T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, *J. reine angew. Math.*, in press.

② T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, *Quart. J. Math.* **63** (2012), 489–505.

③ T. Tsuda, From KP/UC hierarchies to Painlevé equations, *Int. J. Math.* **23** (2012), 1250010 (59pp).

④ K. Kajiwara, N. Nakazono and T. Tsuda, Projective reduction of the discrete Painlevé system of type  $A_2 + A_1$ , *Int. Math. Res. Not.* **2011** (2011), 930–966.

⑤ T. Tsuda, On an integrable system of q-difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q-Painlevé equations, *Comm. Math. Phys.* **293** (2010), 347–359.

⑥ J. Matsukidaira, A. Nobe, H. Tanaka and T. Tsuda, Constructing two-dimensional integrable mappings that possess invariants of high degree, *RIMS Koukyuroku Bessatsu* **B13** (2009), 75–84.

⑦ K. Kajiwara, M. Kaneko, A. Nobe and T. Tsuda, Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve, *Kyushu J. Math.* **63** (2009), 315–338.

⑧ T. Tsuda and T. Takenawa, Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties, *Adv. Math.* **221** (2009), 936–954.

⑨ T. Tsuda, Universal character and q-Painlevé equations, *Math. Ann.* **345** (2009), 395–415.

[学会発表] (計 8 件)

① 津田照久, UC 階層とモノドロミー保存変形, 超幾何函数, 「日本数学会年会」(函数方程式論分科会特別講演), 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学

② T. Tsuda, UC hierarchy, monodromy preserving deformation and hypergeometric function, “MPI-Oberseminar” Max Planck Institute for Mathematics, 2011 年 8 月 25 日, Bonn (Germany)

③ T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformations, 7th International Conference on “Differential Equations and Dynamical Systems”, 2010 年 12 月 17 日, University of South Florida, Tampa (USA)

④ 津田照久, UC 階層とモノドロミー保存変形, 超幾何函数, 研究集会「可積分系数理の多様性」, 2010 年 10 月 28 日, 九州大学応用力学研究所

⑤ 津田照久, UC 階層とモノドロミー保存変形, 超幾何函数, 研究集会「可積分系数理の多様性」, 2010 年 8 月 20 日, 京都大学数理解析研究所

⑥ T. Tsuda, UC hierarchy, monodromy preserving deformation and hypergeometric function, International

Conference "Symmetry plus Integrability" 2010年6月11日, South Padre Island, Texas (USA)

⑦ T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformations, "Discrete Integrable Systems" 2009年7月3日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge (UK)

⑧ T. Tsuda, From KP/UC hierarchies to Painlevé equations, "Discrete Integrable Systems", 2009年5月20日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge (UK)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

津田 照久 (TSUDA TERUHISA)

一橋大学・大学院経済学研究科・准教授

研究者番号: 00452730

### (2) 研究分担者

なし。

### (3) 連携研究者

なし。