

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21740124

研究課題名(和文)作用素環論を用いた熱平衡・非平衡統計力学の研究

研究課題名(英文) Analysis on equilibrium/nonequilibrium statistical mechanics by theory of operator algebra

研究代表者

緒方 芳子(Ogata, Yoshiko)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：80507955

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円、(間接経費) 900,000円

研究成果の概要(和文)：量子スピン系の巨視的物理量、量子非平衡系における時間反転対称性について解析を行った。本研究では(i)量子スピン系におけるマクロな物理量の可換な行列による近似(ii)非平衡過程における時間反転対称性の破れの度合いについての解析を行った。量子系における同時確率分布を考える上で、巨視的物理量の非可換性がどの程度のものであるのかを見極めるのは重要であるが、巨視的物理量の組がいつも可換な行列で近似できることを示したのが(i)の結果である。(ii)は時間反転対称性の破れについての解析で、今まで知られていた大偏差的関数が、時間反転対称性の破れの度合いを表すものであることを示した。

研究成果の概要(英文)：I studied properties of macroscopic observables in quantum spin systems and time reversal symmetry in quantum nonequilibrium systems. We showed that it is possible to approximate macroscopic observables in quantum spin systems with commuting matrices. We also showed that some known function in nonequilibrium statistical mechanics of quantum systems can be interpreted as a function that represents the rate of broken time reversal symmetry.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 解析学基礎

キーワード：量子統計力学

### 1. 研究開始当初の背景

ミクロな物理系の運動は、量子力学によって記述される。一方で、我々が目にするマクロな物理系は、ある種のマクロなレベルでの秩序を持っているように見える。熱力学や流体力学は、このマクロな秩序を汲み取ったものである。この秩序が、どのように現れてくるのかは、数学としても物理学としても興味深い問題である。確率論の観点からは、この、「系が大きくなるにつれて自然に現れてくる秩序」を記述するのに、最も自然なものであるように思われる。しかし古典的な系については実に様々な系で熱平衡非平衡統計力学が確率論的な立場から解析をされているのに対して、量子系における該当する研究は非常に限られている状況であった。

### 2. 研究の目的

本研究の目標は、マクロな量子系における、熱平衡・非平衡統計力学、その普遍的な性質を、確率論的な立場から理解することにある。マクロな量子系は、作用素環によって与えられるため、これは非可換確率論に対応する。さらに時間発展する系におけるマクロな物理量の確率分布を議論することは、量子情報理論の量子制御の問題につながるものである。

### 3. 研究の方法

古典的な確率論で知られた、一般的な知見と作用素環論によって構築された非可換代数を扱う手法を合わせることにより解析を行った。具体的には、作用素環の基本的理論にあわせて、作用素環の富田竹崎理論、近年大きく発展した  $C^*$  環の近似理論、確率論の大偏差原理に関する理論を用いた。

### 4. 研究成果

#### (i) 量子スピン系におけるマクロな物理量の可換な行列による近似

本研究における課題として、量子系における複数の物理量についての確率分布を如何に定義するかという問題がある。量子系では物理量の同時確率分布というのは一般には定義できない。というのは、量子系の物理量は、互いに非可換なので、同時スペクトル分解ができないからである。これは量子力学の不確定性原理として知られる。非可換な物理量は同時に精密に観測することはできない。しかしながら、マクロな物理量だと、話が少しだけ変わってくる。マクロな物理量は、漸近的に可換なのである。もう少し詳しく言うと、有限サイズの箱を考え、その箱のサイズをどんどん大きくしていったら、空間全体に広げよう。ローカルな物理量の有限サイズの箱の中の空間

平均は非可換な代数の元であるから、一般に互いに非可換である。しかし、それらの交換子を考えると、箱の大きさを大きくしていくにしたがって、

そのノルムは次第にゼロへ近付いていく。これらの量は「漸近的に可換」であるということである。ということは、これら物理量は古典的な(すなわち可換な)物理量で近似できることを意味するのであろうか。

一般に、「漸近的に可換」な行列の組の列はいろいろかんがえられる。こういった組の列は必ず「真に可換」な行列の組の列で近似できるかということそうではない。2つの場合は、Linにより、肯定的に示されている。一方3つ以上の行列では、トポロジカルな理由によりこれが満たされない例が知られている。したがって、マクロな物理量が漸近的に可換であるからと言って、それが「真に可換」なものでノルム近似できるとは全く言えない。

しかしながら、本研究では、それが真であることを示した。この背後には、マクロな物理量のかかわる熱力学的な構造がある。熱力学的な構造とは、より詳しく言うと、平均エントロピーという熱力学量が定義され、それが自由エネルギーとルジャンドル変換によって結びついているという事実である。この事実をもとに解析を重ねると、トレース状態についての同時確率分布の大偏差原理とでもいうべき定理が得られる。この大偏差原理の定理が、我々に、巨視的物理量の「スペクトル射影」(厳密には上で述べたように同時分解は不可なので近似的なもの)のランクの評価を与える。これによって可換な行列による近似が行うことが可能になった。重要な点は、この大偏差原理の評価のレート関数が、凸なもので与えられているということである。上で述べたように、一般にほぼ可換な行列な行列の可換な行列による近似は成り立たない。しかし、「スペクトル構造」が、ここで与えられたように凸なものであると、トポロジカルな障害がないということがいえる。この凸という性質こそは、エントロピーの持つ熱力学的に重要な性質であり、したがってこの近似は、巨視的物理量の熱力学的な構造によって保証されているということができるのである。これは、この熱力学的な構造に、近年得られた  $C^*$  環の議論をあわせて用いることで得られた結果である。

#### (ii) 非平衡過程における時間反転対称性の破れ

量子系における非平衡系について、一般的な設定は、温度の異なる複数の熱浴に接した小さな系の時間発展を考えるというものである。時刻0でこの系が熱浴たちと相互作用をし始めたとして、時刻無限大でどうなっているかを問うものである。これまでに言えていることは、系は時間発展して、時間反転対称性の破れた状態へと収束するということであった。収束した状態の時間反転対称性の破れは大きい。どのくらい大きいかというと、数学的にはこの収束状態と、その時間反転とは「互いに特異」といえることができる。系は時間発展していくことで、時間反転対称性が非常に大きな破れへとどんどん破れていく。それでは、その破れ方はどのようなものなのだろうか？

本研究における、ひとつのゴールは非平衡系で知られたある対称性をみだす関数に対して仮説検定の立場から物理的意味づけを行うことであった。この関数はrelative modular operator という、作用素環 Tomita-Takesaki理論で表れる作用素によって表される。古典系ではこの関数は、エントロピー生成と呼ばれる量の時間平均の moment generating 関数となる。エントロピー生成は非平衡性を表す量である。古典系でこの関数の満たす対称性はEvans-Searles fluctuation theoremという良く知られた性質である。しかしながら、relative modular operatorは物理量ではなくこの量子版の対称な関数は、「物理量のmoment generating 関数」としての意味を持たない。したがって新しい解釈がもとめられる。一つの解釈は、「流れたエネルギーの総量についての moment generating 関数」というもので物理の多くの文献においてこの観点に基づき研究されている。これは初期条件が特別で、部分系のハミルトニアンについての不変状態になっているときのみ成り立つ解釈であるが本研究では、この関数を別の視点からより抽象的にとらえた。すなわち、この関数は、「時間反転対称性の破れの度合い」を表すものである。古典系の場合、これはエントロピー生成にかかわる量だったわけであるが、エントロピー生成は特に時間反転対称性の破れと密接にかかわりがある。古典系のような「物理量」についての関数にはなっていないものの、量子系でもこの関数は時間反転対称性の破れを表すものとして見ることが出来ることを本研究で明らかにした。より詳細に言うと、時刻tでの状態と、その時間反転の状態についてPositive Operator Valued Measurementとよばれる測定を行う。このとき、これら二つの状態が”より区別しやすい”、というのは、時刻tの状態について、より”大きく”時間反転対称性が破れている、ということである。もちろん、どれだけ有効な測定をしたかによ

って結果は変わってくるわけであるが、仮説検定ではこれを「エラーが最小」となるようにする。この、最適な測定の下、二つの状態

態がどれだけ区別できるかを見るわけである。エラーが小さければ小さいほど二つの状態は区別しやすいということである。時間反転対称性が破れていない初期状態から時間発展していったときに時間tが経つにつれて、時間反転対称性はどんどんやぶれていく。このとき、先の最適測定についてエラーの漸近的振る舞いを与えるのが、我々が問題にしていた対称な関数である、というのが得た結果である。この証明をするのに、行列について知られているある不等式の、一般のvon Neumann環への拡張が必要であったがこれ自体新しい知見である。これにより、我々の、時間発展する量子系、という枠組みに限らず、互いにnormalな状態の列におけるPositive Operator Valued Measurementによる仮説検定を議論することが可能となった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(1) Y. Ogata,  
Approximating macroscopic observables in quantum spin systems with commuting matrices,  
J. Funct. Anal. 264 (2013) 2005--2033

(2) V. Jaksic, Y. Ogata, C.-A. Pillet, R. Seiringer,  
Quantum Hypothesis Testing and Non-Equilibrium Statistical Mechanics,  
Rev. Math. Phys. 24 (2012) 1230002

(3) Y. Ogata,  
A Generalization of Powers-Størmer Inequality,  
Lett. Math. Phys. 97 (2011) 339--346

[学会発表](計5件)

(1) Arizona School of Analysis and Mathematical Physics  
Tucson, Arizona,  
2012年3月  
“Hypothesis testing and non-equilibrium statistical mechanics”

(2) Conference on von Neumann Algebras and Related Topics

京都大学数理解析研究所  
2012年1月9日~3日  
"Non-Equilibrium Statistical Mechanics"

(3)日本数学会 特別講演  
信州大学  
2011年9月28日~10月1日  
"量子スピン系における確率解析とその応用"

(4)Conference on C\*-Algebras and Related Topics  
京都大学数理解析研究所  
2011年9月5日~9月9日  
"Approximating macroscopic observables in quantum spin systems with commuting matrices"

(5)Summer school on "Non-equilibrium statistical mechanics"  
Universite de Montreal Canada  
2011年7月1日~7月29日  
"Approximating macroscopic observables in quantum spin systems with commuting matrices"

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

緒方芳子 (Yoshiko Ogata )

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：80507955