

機関番号：32612

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2010

課題番号：21740127

研究課題名（和文） 分類理論的視点による非可換位相力学系の研究

研究課題名（英文） Research on noncommutative dynamical systems
from the viewpoint of classification theory

研究代表者

勝良 健史（KATSURA TAKESHI）

慶應義塾大学・理工学部・講師

研究者番号：50513298

研究成果の概要（和文）：分類理論的視点により，非可換位相力学系に関わる様々な C^* 環のクラスに対して，多くの結果を出した．これらの結果の帰結として特に，古くからの未解決問題である UHF 環の定義に関する Dixmier の問題と semiprojective という性質に関する Blackadar らによる問題の 2 つの問題を解くことに成功した．また，グラフ C^* 環およびその拡張に対して分類理論に直接かかわる結果を出すことに成功した．

研究成果の概要（英文）：I got many results on various classes of C^* -algebras related to noncommutative dynamical systems from the viewpoint of classification theory. As consequences of these results, I had succeeded in solving two long-standing problems, namely Dixmier's problem on the definition of UHF algebras and problems on semiprojectivity raised by Blackadar and others. I had also succeeded in getting the results on graph C^* -algebras and their generalizations relating classification theory directly.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2010 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環，関数解析学，力学系

1. 研究開始当初の背景

非可換位相力学系とは C^* 環とそれへの群作用の組のことである． C^* 環は作用素環と呼ばれているものの一種であり，作用素環には他に量子力学の数学的定式化を与えるという目的で誕生した von Neumann 環がある．作用素環論は，数学や物理の多くの分野と関連して発展し，今日まで盛んに研究されている分野である．その作用素環論において誕生のときから中心的な問題は，数学の他の多くの分

野もそうであるように，分類理論である．作用素環の分類理論における問題は次の 2 つに分けることができる：

- ・与えられた性質を持つ作用素環を構成する．（存在性問題）
- ・異なる構成方法で得られた 2 つの作用素環がいつ同型になるかを決定する．（一意性問題）

分類理論という視点では C^* 環論に比べ von

Neumann 環論の方が発展している。von Neumann 環は基礎となる因子環と呼ばれるものに分解することができ、因子環は I 型, II 型, III 型の 3 つのタイプに分類できるということが、創始者である von Neumann と Murray の研究で明らかにされている。また、AFD と呼ばれる性質を持つ因子環は Connes と Haagerup によって完全に分類された。

作用素環論において上で説明した環そのものの分類と同程度に重要な事として、作用素環への群作用を分類するという問題がある。環への群作用を調べる上で、環の構造をよく理解する必要があることは想像しやすいが、逆に環の分類理論に群作用の研究が役に立つということが多々ある。その 1 つとして、作用素環への群作用が与えられると接合積と呼ばれる新たな作用素環を得ることができるという点がある。可換作用素環という最も簡単な作用素環への群作用を考えても、接合積を考えることで非常に複雑な作用素環を得ることができ、上記の存在性問題に対してとても有効である。実際、von Neumann と Murray が考えた群測度構成法で作られる von Neumann 環はそのような接合積である。群作用が上記の一意性問題に対して使われた例としては富田竹崎理論による III 型因子環の構造解析がある。群作用の分類理論においても中心的な問題は上で挙げたような存在性問題と一意性問題である。この方向での最初の大きな結果は、Connes による AFD 因子環への群作用の分類に関する結果であろう。Connes は、この群作用の分類と上記の環の分類により 1982 年にフィールズ賞を受賞している。Connes の結果以降多くの研究者が因子環への群作用の分類を研究している。Connes と同じくフィールズ賞を受賞した Jones もその一人である。

上に von Neumann 環に対する環の分類、群作用の分類に関してどのような研究がなされてきたかを述べたが、対応する C^* 環の問題も最近急速に発展してきた。 C^* 環の分類理論が発展する契機となった仕事は、Elliott による AF 環と呼ばれる C^* 環の分類である。これは Glimm や Dixmier による UHF 環の分類および Bratteli の研究をもとにしたものであり、その後の C^* 環の分類理論の先駆の仕事である。この流れはその後 Elliott による AT 環の分類などを経て、Lin による TAF 環の分類へと進展した。これらの C^* 環は全て安定有限という性質を持っている。それとは全く反対の純無限という性質を持つ C^* 環の分類は、Lin による結果に先立ち Kirchberg と Phillips によってなされている。彼らが分類した環は Kirchberg 環と呼ばれている。上記の結果で分類に使われた道具は全て K 理論的

なデータである。 C^* 環の分類理論に関してはその後多くの発展があり、今日でも盛んに研究されている。

C^* 環への群作用の分類に目をうつす。Connes が用いた因子環への群作用を分類する技術は、Herman と Ocneanu により UHF 環への特殊な作用の分類に使われてのち、Kishimoto を始めとする多くの研究者による UHF 環、AF 環、AT 環などの C^* 環への整数群 Z の作用の分類へと応用されていった。これらの安定有限 C^* 環への群作用の分類は Rordam により純無限 C^* 環の構造解析に用いられ、上記の Kirchberg と Phillips による分類へとつながることになる。これは群作用の研究が作用素環の構造解析に繋がっている例の 1 つになっている。 C^* 環の群作用の分類は、環としては AF 環や AT 環などから TAF 環や Kirchberg 環など環の分類が完成したクラスに、群としては整数群からその直積や有限群へと拡張されつつあるが、新たに生まれる障害が多く解析は非常に困難である。

2. 研究の目的

C^* 環が可換のとき、 C^* 環への群作用を考えることは(局所)コンパクト空間への群作用を考えることと同値になる。コンパクト空間とそれへの群作用の組が位相力学系と呼ばれることから、 C^* 環とそれへの群作用の組は非可換位相力学系と呼ばれる。

本研究課題の目的は、「1. 研究開始当初の背景」で説明した分類理論的な視点から現在急速に発展している非可換位相力学系の研究を様々な方向に押し進めることである。

3. 研究の方法

環の分類に関しては、非可換位相力学系から接合積という方法で得られる C^* 環、およびその拡張を用いて、様々な性質を持つ C^* 環を構成するというものをする(存在性問題)。また、それら特殊な構成方法で得られた C^* 環を不変量を用いて分類するというものをする(一意性問題)。

群作用の分類に関しては、私の考案した様々な C^* 環の構成方法を用いて、群作用の例を作る(存在性問題)。また、上で説明した Connes らによる因子環への群作用の分類で行われたステップに従い、「Rohlin の性質」と呼ばれる性質に注目して、与えられた 2 つ

の作用が「同じ」であることを示す（一意性問題）。

同じような視点を持っている世界の研究者と積極的に交流を持つことにより、これまで解かれていなかった問題に挑戦する。

4. 研究成果

本研究課題の成果について項目ごとにまとめて述べる。

(1) 位相グラフ C^* 環と Markov 連鎖

「1. 研究開始当初の背景」でも述べたとおり、位相力学系から接合積という方法で C^* 環を作る方法は最も基本的で重要な構成方法の一つである。この方法の拡張は数多く知られているが、私が考案した位相グラフおよびそれから C^* 環を作る方法もその一つである。位相グラフから C^* 環を作る方法は接合積の他に、行列から Cuntz-Krieger 環と呼ばれる C^* 環を構成する方法の拡張にもなっている。Cuntz-Krieger 環は、行列から作られる Markov 連鎖と呼ばれる位相力学系を調べるために導入された C^* 環であるが、Cuntz-Krieger 環と Markov 連鎖の関係については、まだ謎な部分が残っていた。私は位相力学系と行列の共通の拡張である位相グラフを用いて、Cuntz-Krieger 環と Markov 連鎖との関連を説明する論文を書いた。

(2) UHF 環の定義に関する Dixmier の問題

可分の仮定のもとでは、UHF 環の定義として3つの同値な定義がある。この3つの定義が可分でなくても同値かどうかという問題を、Dixmier は1967年に出版された論文で尋ねた。それ以来40年以上、この問題に関して誰も答えられていなかったが、Farah 氏との共同研究で可分でないときはこの3つの定義は同値でないことを示した。証明には接合積を用いている。

(3) ウルトラグラフ C^* 環

Cuntz-Krieger 環という C^* 環は Markov 連鎖という力学系と関係すると(1)の項で述べたが、この Cuntz-Krieger 環の組み合わせ論的な拡張にグラフ C^* 環と Exel-Laca 環の2つがある。この2つの C^* 環のクラスはどちらかがどちらかを含むという関係ではない。その2つのクラスを自然に含む形で Tomforde によりウルトラグラフ C^* 環というものが導入

された。私は Tomforde 達との共同研究で、これら3つの C^* 環のクラスは森田同値という同値関係で見れば全て一致するが、同型という観点で見ると AF 環という特別な C^* 環に限っても全然違うことを示した。これらの結果は二つの論文に分けて発表し、どちらも査読付きの雑誌に掲載された。

(4) C^* 連絡と接合積

普通の非可換位相力学系や位相グラフなどを含むより広い非可換力学系の概念として C^* 連絡というものがある。Pimsner によって、接合積を拡張する形で C^* 連絡に対して C^* 環を構成する方法が導入された。その後私が、定義の見直しも含めて調べた

C^* 連絡という非可換位相力学系とみなすことができるものから接合積を拡張した C^* 環を構成する方法があるが、この構成方法が作用及び接合積と相性が良いことを示した。この結果については国際研究集会で発表したが、論文にまとめて発表する予定である。

(5) warped 接合積

位相力学系に、さらに空間の上の Hermitian 線束を考えると、接合積を少しひねった warped 接合積と呼ばれる C^* 環を得ることができる。この warped 接合積に対しては普通の接合積に対する定理がそのまま成り立つこともあれば、新しい現象が現れる場合もある。私は、Eilers 氏と共同で接合積に関して知られている多くの結果が warped 接合積に対して成り立つか否かを調べ、結果をいくつか出した。この結果はいくつかの研究集会で発表を行ったが、現在論文にまとめているところである。

(6) Rohlin の性質と単位的でない C^* 環の中心的列環

上の「3. 研究の方法」に挙げたように、可換力学系を調べる上でキーとなる性質として Rohlin の性質と呼ばれる性質がある。この性質は Connes を初めとする多くの研究者の手によって非可換力学系に拡張され様々な性質が調べられている。しかしほとんどの論文では、作用する C^* 環として単位的なもの（空間の言葉でいえばコンパクトなもの）しか考えられていない。私は単位的でない C^* 環の上の自己同型写像や自己準同型写像に対してどのように Rohlin の性質を定義すれば良いかを調べた。様々な例や単位的 C^* 環に

対して成り立つ定理を考えることによって、いくつかの候補のうちから正しい定義だと思われるものを見つけることに成功した。この過程で重要だったのは、単位的でない C^* 環に対して中心的列環の定義を慎重にしなければいけないという点であった。この中心的列環を用いて Z -stability や approximate divisibility といった性質を、単位的な C^* 環から一般的な C^* 環に拡張し、単位的な C^* 環に対して成り立つ様々な定理を一般的な C^* 環に拡張することに成功した。これは、私が提唱する中心的列環の定義が正しいものであることを示している。この成果はイギリスで行われた研究集会で発表し、現在論文にまとめているところである。

(7) semiprojective C^* 環に関する結果

semiprojective という性質は C^* 環の分類理論で重要な役割を演じる性質である。2010年の5月に私の受入機関であるコペンハーゲン大学において semiprojective C^* 環に関する研究集会が行われ、私もある未解決問題に関する部分的な結果を発表した。この研究集会の最後に、参加者全員で話し合いこれから考えるべき未解決問題をリストにまとめた。

その後、Eilers氏と共同でまずは単位的なグラフ C^* 環がいつ semiprojective になるかを考え、完全に決定することに成功した。この結果を用いて、上記のリストの未解決問題のいくつかに挑戦したところ、その中の一つの問題を解くことに成功した。これは、有限次元 C^* 環の semiprojective C^* 環による拡大はまた semiprojective かという問題であり、多くの研究者が10年以上も挑戦してきたにも関わらず、有限次元 C^* 環が1次元で拡大が分裂するときですら未解決であった (Loring氏の著書でもこの問題が挙げられている)。我々は、グラフ C^* 環を用いてこの問題の反例を挙げることに成功した。この成果は、一般の C^* 環に対する問題に挑戦するとき、グラフなどの具体的なものから作られる C^* 環を用いることが有効であるという私の考えが成功した良い例である。また、この問題とともに10年以上も未解決であった、semiprojective C^* 環の full corner はまた semiprojective かという問題に関しても反例を挙げることに成功した。この成果はスペインやノルウェーなどの多くの地で発表した。これらの結果は2本の論文にまとめる予定である。1本目の論文では、上記の2つの問題の反例の短い証明とともにいくつかの肯定的な結果とさらなる未解決問題がまとめられている。この論文はほぼ書きあげており、近々雑誌に投稿する予定である。2本目の論

文では、この研究のスタートである単位的なグラフ C^* 環が semiprojective になるかの完全決定の結果を扱っている。

(8) Leavitt C^* 環と (n,m) 力学系

2011年の1月からスペインで行われている長期プロジェクトに参加しているとき、滞在先でAra氏に彼の最近のアイデアに関して意見を尋ねられた。これがきっかけでAra氏との共同研究がスタートした。後に Fell バンドルに詳しい Exel 氏が共同研究に加わった。Ara氏、Exel氏との共同研究では、グラフから生じる新たな力学系に付随する C^* 環の様々な構造を調べている。グラフが頂点1つと n 個のループからなっているときは、この力学系はアルファベット n 個からなるフルシフトになる。より一般に、グラフの separation が自明なときは、Markov シフトと呼ばれる古くから多くの分野に現れる自然な対象になる。

まず初めに頂点が1つだが自明でない separation を持つグラフに対する力学系を調べた。この力学系は自然数 n, m を用いて (n, m) 力学系と呼ばれる。 $m=1$ のときは上記のアルファベット n 個からなるフルシフトになるが、 n も m も2以上のときは非常に複雑な力学系であることが分かった。これらの力学系から接合積と同様の手続きを経ることで自然に C^* 環が付随するが、我々はこの C^* 環は Leavitt C^* 環と呼ばれる C^* 環の商になっていることを示し、この C^* 環に関して多くの性質を調べた。Leavitt C^* 環はグラフ C^* 環の拡張として最近注目を浴び始めている C^* 環である。 (n, m) 力学系とその C^* 環に関する結果に関してはほぼ論文が書きあがっており近々雑誌に投稿する予定である。その後、もっと一般のグラフに対する力学系とそれに付随する C^* 環に関する研究を続ける予定である。

(9) グラフ C^* 環の分類理論に関する存在性問題

Eilers氏、Tomforde氏、West氏と共同でグラフ C^* 環の分類理論に関する結果を出した。この結果は「1. 研究開始当初の背景」に書いた「存在性問題」に関する結果である。グラフ C^* 環が単純のときは、分類理論は完全に解決しているが、単純でないときはまだまだ分かっていないことが多い。ただ、グラフ C^* 環が1つしかイデアルを持たないときや、特別な最大(または最小)イデアルを持つときは K 理論を用いた不変量が少なくとも強森田

同値に対する完全不変量であるという結果が知られている。この共同研究では、上記の場合にどのような不変量が生じるかということ完全決定した。この結果は単にグラフ C^* 環の結果だけではなく、与えられた C^* 環がいつグラフ C^* 環と同型になるかという問いに関しても一定の結果を与えてくれる。また、上記のような特別なイデアル構造を持たない場合にも不変量の計算を行っている。この計算は下記の(10)で用いられる。この結果に関してはすでに論文にまとめてあるので近々雑誌に投稿する予定である。

(10) 単純でないグラフ C^* 環の分類と普遍係数定理

Copenhagen にいる数名の研究者とともに単純でないグラフ C^* 環の分類理論に対する「一意性問題」および「存在性問題」に関する研究を始め、いくつかの部分的な結果を得た。単純でない C^* 環の分類理論で重要な役割を演じるのは、イデアル構造を考慮にいれた普遍係数定理と K -web と呼ばれる不変量である。一般の C^* 環に対しては K -web は完全不変量でないことが知られているが、グラフ C^* 環に対しては完全不変量である可能性がある。上記(9)で得られた結果を用いて K -web の計算をするとともに、それが完全不変量であるかどうかを調べている。一定の成果は得られたが、満足のいく結果を得るために現在も研究を続けているところである。また、グラフ C^* 環とは限らない一般の C^* 環に対する普遍係数定理に関する研究も行っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

[1]
T. Katsura, P. S. Muhly, A. Sims, M. Tomforde
 “Graph algebras, Exel-Laca algebras, and ultragraph algebras coincide up to Morita equivalence”
 Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 査読有, 640巻, 2010年, 135 – 165.

[2]
Takeshi Katsura, Ilijas Farah
 “Nonseparable UHF algebras I: Dixmier's problem”

Advances in Mathematics, 査読有, 225巻, 2010年, 1399 – 1430.

[3]
Takeshi Katsura
 “Cuntz-Krieger algebras and C^* -algebras of topological graphs”
 Acta Applicandae Mathematicae, 査読有, 108巻, 2009年, 617 -- 624

[4]
T. Katsura, A. Sims, M. Tomforde
 “Realizations of AF-algebras as graph algebras, Exel-Laca algebras, and ultragraph algebras”
 Journal of Functional Analysis, 査読有, 257巻, 2009年, 1589 – 1620.

[学会発表](計3件)

[1]
Takeshi Katsura
 Approximate divisibility and the Rokhlin property for non-unital C^* -algebras,
 LMS Midlands Regional Meeting and Workshop on C^* -algebras,
 2010年9月10日
 University of Nottingham

[2]
Takeshi Katsura
 Finite presentations of Kirchberg algebras,
 Workshop on Semiprojectivity and Asymptotic Morphisms,
 2010年5月20日,
 University of Copenhagen

[3]
Takeshi Katsura
 C^* -algebras associated with C^* -correspondences,
 Operator Algebra Special Session AMC-2009,
 2009年6月24日,
 Putra World Trade Centre, Kuala Lumpur, Malaysia

6. 研究組織

(1) 研究代表者
 勝良 健史 (KATSURA TAKESHI)
 慶應義塾大学・理工学部・講師
 研究者番号: 50513298

(2) 研究分担者
 該当なし

(3) 連携研究者
 該当なし