様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24 年 5　月 20　　日現在

機関番号：32619
研究種目：若手研究(B)
研究期間：　2009　～2011
課題番号：２１７４０１２８
研究課題名（和文）　作用素環で記述される量子系,特に超対称性系の数理物理

研究課題名（英文）　Operator algebraic approach to supersymmetry

研究代表者 守屋　創（MORIYA　HAJIME）
芝浦工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20399794

研究成果の概要（和文）：超対称性を持つ量子系を作用素環上で定式化し，数理的な構造を研究した．　C*代数上の超対称性微分を出発点に，超対称性力学系を導入した．隠れた超対称性を持つ格子フェルミオン系，場の量子論に対応する連続系に分け，超対称性微分の定義域として可能なものを詳細に調べた．格子系，連続系ともに C*代数超対称性系の具体例を与えた．超対称性を満たす状態の空間の性質についても論じた．

研究成果の概要（英文）：We present a C*-algebraic approach to supersymmetry. Based on superderivations on C* algebras, we introduce some general classes of supersymmetric dynamics. We consider fermion lattice models with hidden supersymmetry and supersymmetric quantum field models as well. Each of them is studied in details with some concrete examples provided. We discuss general properties of supersymmetric states.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：数理物理

１．研究開始当初の背景

公理的場の理論の観点から，数学的に厳密な超対称性へのアプローチがみられる． その成果はハーグ–ロプザンスキー–ゾニウス定理で著名なロプザンスキーによるモノグラフに，公理的場の理論の立場からの対称性に関する一般的な結果を数多く導いているが，具体的な超対称性モデルについては言及されていない．これに直接続く研究は，筆者が知る限り長く途絶えていた．

2000 年代に入り非可換幾何の影響の下，作用素環論で超対称性が取り上げられ，非可換の指数定理を志向したいくつかの結果が得られている．しかし作用素環での超対称微分

の定義域は曖昧にされいた.

２．研究の目的
C*代数を用いた量子系の数理を超対称性系に広げることが研究の目的である.

既存 C*代数を用いた場の量子論，量子統計力学の枠組みそのままでは，超対称性をいかに扱うか自明で無い． 理由は以下の通りである.

C*系ではボゾン代数として通常ワイル代数が使われる． 当然フェルミオン代数としては CAR 代数である.

超対称性フォックヒルベルト空間の構成,すなわちボゾンフォック空間とフェルミオンフォック空間をテンソル積してできる超対称性ヒルベルト空間上で超対称作用素を非有界作用素として定義できる．これからの推測で，ボゾン代数と CAR 代数を一意に決まる C*テンソル積を超対称 C*代数としてとることが考えうる．しかしワイル代数では超対称性微分を超対称代数を満たすように定義することはできないという結果が知られている．たとえ自由場であってもこの定理が効いてうまくいかない．通常の物理ではフェルミ場をボゾン場，ボゾン場をフェルミ場に写す線形写像で超対称変換を定義された．C*代数は有界な元からなるため,ボゾン場が非有界であることから超対称変換を与えるのに大きな障害になってしまう.

さらに別の困難として，ハミルトニアン時間発展の解析的な元の集合は超対称性微分の定義域には入らない．それゆえこれをもとにしたいくつかの論文は C*微分の定義域のあつかいが正しくないといえる．（しかし,この事実と，前の段落で述べたワイル代数から来る困難は別物である．これまでの文献にはいくらか混同されていたが.）

こうした C*代数からくる特有の困難に対処しながら，C*超対称力学系を一般的な形で提示していきたい． 無限自由度系では,相転移や自発的対称性の破れがおこり，時間発展や対称性を選んだヒルベルト空間や表現に依らない形で C*力学系として与えることが出発点になる.

超対称性微分の C*代数上での定義域に関する一般論を準備し，超対称を厳密に定義する．超対称性状態のサイクリック表現の中で C*力学系がいかに実現されるか明らかにする． また超対称性が破る場合について，漸近可換性という条件無しで議論をすすめたい．超対称性状態のなす状態空間の性質を,基底状態の空間で知られた場合と比較しながら調べる.

物理の文献では超対称性状態をエネルギーゼロ状態と，また超対称性の破れをハミルトニアン最低固有値が真に正であること同一視している．しかしヒルベルト空間を想定し，そこで超対称変換と時間推進の生成子が作用素として実現されることを前提とした議論である．実際物理側の初期の超対称性の論文に，こうした議論の厳密性へ疑いが記されている． 超対称性 C*代数で与え， 数学として不満であった点を明確にしていく.

３．研究の方法
物理の超対称性理論では,グラスマン数は欠くことができない(スーパーフォーマリズム).しかし C*代数にグラスマン数は導入せず,C*微分(derivation)で定式する.

「超対称性」を広義の意味に使い，必ずしもボゾン場とフェルミオン場の対称性に限らない抽象的な扱いを行う.

これまでの文献にある C*代数上の超対称性微分の定義域に関する点で，根拠が不十分な仮定を検証し，具体例を構成しながら一般性を持つものに改める.

C*代数上の部分代数で定義された超対称性微分の不変性をもとに，超対称性状態を定義とする． 超対称性微分が定義される部分代数の満たすべき条件を連続系， 格子系に分けて考察する．また不変性の拡張可能性についても論じる.

C*代数において時間発展群と超対称性微分の関係付けをおこなう． 任意の超対称状態空間の GNS 表現において時間発展群の生成子と超対称作用素がいかなる作用素として関係を持つのか，作用素論を展開する.

一般論に加え，物理のグループから提唱されている超対称性構造を持つフェルミオン格子モデルを C*代数で研究する． 無限に広がった格子で超対称フェルミオンモデルを CAR 代数での超対称微分で与え,作用素代数を用いた解析を行う.

４．研究成果
時間発展群のパラメーターに関する連続性から,(I)強連続，(II)弱連続の場合に分け考察した．前者は格子フェルミオン系(CAR 代数),後者は超対称 C*代数(レゾルベント代数と CAR 代数のテンソル積)であり，設定が異なり，一部は(I)が(II)を含意するが，ほぼ独立な二つの C*理論が出来た.

C*代数超対称性系の満たすべき公理を示し,それをすべて満たす具体例を与えた． また超対称性が破れない場合について，超対称性状態の GNS 表現から特徴づけを行った.
結果をまとめたものを現在ヨーロッパの数理物理の雑誌に投稿中である.

(I)(II)二つの場合に分け違いを説明する.

(I)の場合は，状態や表現を経ずに C*代数の中で閉じた超対称性 C*力学系の議論が可能だと示した．格子フェルミオン系の有限距離モデルを一般的に扱い，超対称微分を量子スピン系での局所ポテンシャルと類似の方法で，局所代数に与えた．任意の局所部分代数でそこでの変換に対応する，局所超対称演算子と局所ハミルトニアンを関係づけた．逆に有限距離な超対称微分から局所超対称演算子を作る方法を示し，本質的に一対一であることを示した．

超対称性微分の定義域について考察し，超対称性微分を二回合成したものがゼロになること， すなわちナイルポテント性の一般的な条件を示した．またそれと共役な超対称変換との合成が時間発展の前閉生成子になるための十分条件を得た．(I)の場合は超対称微分の定義域(局所代数)が時間発展で不変で無いため，(II)の場合より難しい解析が必要である．

C*超対称力学系が超対称性状態の GNS 表現において性質の良い作用素の関係式として実現できることを証明した． この結果は量子スピン系にも適用できる．

具体例として格子フェルミオン系で平行移動不変で三体の局所超対称性演算子からなるモデルを構成した．これは少なくとも二つの平行移動不変な超対称性状態を持ち，さらに平行でないものが高く縮退していることを解明した．

格子フェルミオン系で超対称微分と通常の微分を比較した．格子フェルミオン系(また量子スピン系)では近似内部的微分はかならず不変状態を持ち，これは C*微分の理論で一般化されている．しか超対称性微分は必ずしも不変状態を持つとは限らず， 超対称性が破れる場合があることは自明な例から分かる． 一方局所超対称微分が局所不変状態を持てば体積無限大でも不変状態を持ち，超対称になる．これは基底状態，KMS 状態の場合で古くから知られる事実に対応する．

(II)の場合は C*代数の選択からして非自明である． 2006 年にレゾルベント代数をボゾン系にとり超対称微分を定義する方法がドイツとオーストラリアの研究者により開発され， 単純な自由場モデルが C*超対称性力学系として具体的に構成されている． これを抽出化し，一般的な超対称性 C*理論を構築した．

しかし(I)とは異なり，超対称代数関係を C*代数上で閉じた形で行うことは不可能である． それゆえ考慮する状態にある種の正規性(normality)を課し，超対称力学系実現状態という概念を導入した．これは状態が超対称性かどうかは問わない(実際温度状態が超対称性を破る例になる)．GNS 表現で(明確に見える形では定義できなかった)C*力学系が超対称性を実現することを主張している．技術的な詳細はまず ボゾン系のレゾルベント演算子で単位元に弱収束する軟化子を作る． これを用いて超対称微分の 2 回合成と時間発展の生成子を結びつける．

超対称性状態を「超対称性微分が定義される稠密な部分代数の任意の元に対して，超対称変換がゼロ期待値を与える」と定義した．それにより無限に広がる系，さらには平行移動不変性が破れるような場合(実際に格子系でそうした例がある)でも明確に超対称およびその破れを数学的に扱えるようになった．

超対称性状態は基底状態であることを証明した．(I)の場合は C*代数の中で証明は完結する．(II)は正規状態が超対称性であれば基底状態になる．

(I)(II)共通で，超対称性状態の GNS ヒルベルト空間において，超対称生成子が作用素としての良い性質(自己共役性など)を持つことを一般的に証明した．超対称性状態はゼロエネルギー状態という解釈が GNS 空間で正当化された． これを利用し超対称状態空間が全状態空間の中で単体であることを証明した．(これまでの文献にあった証明は(I)の場合のみしか使えない.)

定義の微妙な点について説明する.超対称不変性が定義できるのは稠密な部分代数上である(もし全系で定義されると超対称微分は有界で，無限に広がる系の理論ではなくなる)．一方で時間発展群は全ての元で定義され時間不変状態の定義は明確である．そこで定義に用いた超対称性微分の定義域が十分広い(稠密)ことの他に，拡張性について気を配る必要がある．超対称微分が C*代数上の微分として閉拡張された時，超対称性状態が拡張された微分でも不変であることを，(I)(II)両方で確かめた．

最後に C*代数の超対称微分に関するいくつかの課題を提案した．

1. いつ超対称微分は閉作用になるか.
2. いつ超対称微分は可閉になるか.
3. ナイルポテントな超対称微分の特徴づけ.
4. 超対称性が破れる無限格子系モデルの構成.

これまで説明したように 1,2 は格子フェルミオン系で，量子スピン系の時間発展の微分の場合と類似した結果を得た．C*環の一般論としてのさらなる研究である． 3 は

(I)(II)の場合で具体例をあげた．4は自明なもの以外(物理の文献にも)知られていないようであり，C*代数を用いた研究の提案である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① H. Moriya, On GNS representation of supersymmetric states in C*dynamical systems
Kyushu University Faculty of Mathematics. COE Lecture Note 30, 39-47 (2011).
査読無し

〔学会発表〕（計１件）
① 守屋創, On supersymmetric C* dynamical systems
日本数学会 2011 早稲田大学年会
関数解析 2011 年 3 月 22 日

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
守屋　創（MORIYA　HAJIME）
芝浦工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20399794

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし