様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：12612
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2011
課題番号：21740129
研究課題名（和文）移流項を伴うロトカ・ボルテラ系の空間パターン解に対する研究

研究課題名（英文） Study on spatial pattern solutions for the Lotka-Volterra system with advection

研究代表者
久藤　衡介（KUTO KOUSUKE）
電気通信大学・情報理工学研究科・准教授
研究者番号：40386602

研究成果の概要（和文）：非線形拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に対して定常解の大域分岐構造に関する数理情報を引き出した。まず、ディレクレ境界条件のロトカ・ボルテラ競争系において、片方の交差拡散項を無限大にした極限系に対して定常解の部分集合が形成する大域分岐枝が得られた。また、ロトカ・ボルテラ系に関連する反応拡散移流系に対して、拡散と移流を無限大とした極限系の定常解の形成する大域分岐構造が得られた。

研究成果の概要（英文）：We derive some mathematical information on the global bifurcation structure of stationary solutions to the Lotka-Volterra system with nonlinear diffusion. First we study the Lotka-Volterra competition system with cross-diffusion under the Dirichlet boundary conditions to obtain the global bifurcation branch of a subset of stationary solutions to the limiting system as a cross-diffusion term tends to infinity. We also study a reaction-diffusion-advection system related to the Lotka-Volterra system and obtain the global bifurcation structure of stationary solutions to the limiting system as the diffusion and advection terms tend to infinity.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形数理、反応拡散移流系、定常解、分岐、数理生物モデル、極限系

１．研究開始当初の背景

非線形拡散を伴うロトカ･ボルテラ系は 1979 年の重定・川崎・寺本の提唱以来、わが国が牽引する形で研究が進められ、対応する発展方程式の解の時間大域的存在や定常問題の解集合の構造については、年々、結果の改良が重ねられていた。その一方で、上記のロトカ・ボルテラ系に限らず、移流項や交差拡散項などの非線形拡散を伴う反応拡散系に関しては、線形拡散系を枠組みとする解析手法が直接的には通用しないケースが多く、さらなる理論研究が求められていた。とりわけ、非線形拡散を伴うロトカ・ボルテラ系の定常的な空間パターン解の大域分岐構造の解明

が急務な問題の一つであり、交差拡散を無限大とした際の空間パターン解の漸近挙動を特徴付ける極限系に対する解析が、Lou-Ni-四ツ谷や久藤-山田などによって進められていた。ところで、移流項を伴う数理生物学モデルのケラー・ジーゲルに関しては、国内の数学者がリードする形で研究が進められていて、細胞性粘菌の集中化を再現する解の基本的メカニズムが解明されつつあった。しかしながら、反応項にも相互作用を伴うロトカ・ボルテラ系については、移流項を付ける問題はほとんど研究されていなかった。そのため、ロトカ・ボルテラ系の定常解に及ぼす移流効果の解析は未開拓な問題であった。

２．研究の目的

(1) 非線形拡散項を伴うロトカ・ボルテラ系を考察する。とりわけ、移流や交差拡散といった拡散の相互作用が、ロトカ・ボルテラ系の定常解集合にどのような非線形効果を及ぼすかを解析する。この解析を通じて（ロトカ・ボルテラ系のみならず）拡散の相互作用に対する汎用的な解析処方を提示することが第一の研究目的である。

(2) ロトカ・ボルテラ系において交差拡散を無限大とした際の定常解の漸近挙動を特徴付ける極限系を導出する。さらに、その極限系の解集合が成す大域分岐構造を解析することによって、交差拡散の定常解に対する非線形効果を提示する。

(3) ロトカ・ボルテラ系において移流項が定常解集合に及ぼす非線形効果を抽出する。とりわけ、移流項が大きいケースで、定常解の分岐構造や空間パターンを調べる。これまであまり解析されてこなかった、ロトカ・ボルテラ系における。交差拡散項と移流項の非線形効果の差異を提示する。

３．研究の方法

(1) 1979 年に重定・寺本・川崎は、縄張り争いをする２種類の生物の個体数変化を記述するロトカ・ボルテラ系において、お互いの生物種の空間的拡散が、競争相手となる種が多いほど促進される状況を記述する交差拡散項(cross-diffusion term)を導入した。この系において、交差拡散項の係数に依存して縄張り争いをする生物種が共存する定常解がどのように変化するかを解析する。具体的には、ディレクレ境界条件の下で、交差拡散項の係数を増加させたとき、共存定常解の形成する分岐枝の形状や安定性の変遷を調査する。まず、分岐理論を用いて、共存定常解が半自明解（いずれか一方の生物が死滅した定常状態）から分岐する様子を、分岐点や分岐の向きの特定を主眼に解析する。また、共存定常解の最大値が交差拡散に依存しないことを証明する。さらに、共存定常解の一様有界性を手掛かりとして、共存定常解の分岐枝を大域的に追跡する。

(2) 上記のロトカ・ボルテラ系において、交差拡散が共存定常解に及ぼす非線形効果を抽出するために、交差拡散の係数を無限大とした極限系を導入する。極限系は、元々の分数型拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に比べるとパラメーターが減っているため、詳細な解構造が得られることが期待できる。極限系の正値解の摂動によって、交差拡散が大きいケースでの共存定常解を得る。

(3) 生物種が、縄張り争いの競争相手となる種の多い場所から少ない場所へ移動する状況を、ロトカ・ボルテラ系に移流項を導入することによってモデル化する。前述の重定・川崎。寺本モデルで導入された交差拡散項に比べると、移流項は、競合種どうしの棲み分けを促進すると予想される。移流項の大きさに応じて、共存定常解のなす分岐枝や安定性がどのように変化するのかを解析する。分岐理論を用いて、共存定常解が定数解や半自明解から分岐する様子をパラメーター表示する。特に、空間１次元のケースでは、振動数の異なる共存定常解の枝どうしが、交差しないことを競争系の比較定理を用いることによって吟味する。

(4) 移流項を伴うロトカ・ボルテラ系の定常問題である連立の楕円型偏微分方程式において、片方の方程式の拡散と移流を無限大にした際の解の漸近挙動を調べる。具体的には、拡散と移流を一定比に保ちながら無限大にした際に、解の収束関数が満たす方程式系（極限系）を導出する。積分条件付きの楕円型境界値問題で構成される極限系の解法手順として、まず、境界値問題の解をパラメーター表示する。次に、その表示が積分条件を満たすかどうか吟味する。なお、反応項が比較的単純な表面科学モデルに対して、同様の方法を試み、上記の極限系に対する解析の準備とする。

(5) 表面科学に現れる反応拡散移流系の定常問題において、第二式の拡散と移流を一定比で無限大とした極限系を解析する。この極限系の解の成す分岐枝を大域的に追跡するとともに、第一式の拡散が小さいケースでは解の遷移層の場所を特定する。上記の解析を通じて、より複雑な反応項を伴うロトカ・ボルテラ系の定常解問題において、拡散と移流を無限大とした極限系の解析に応用する。

４．研究成果

(1) 縄張り争いなどの競争関係にある２種類の生物は、競争相手の種が多い地域ほど空間的拡散が促進される。このような競争種間の拡散の相互作用は、例えば、前述の交差拡散(cross-diffusion)によってモデル化される。交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ系に関する最初の研究成果として、ディレクレ境界条件の下で、共存定常解が存在するための十分条件が得られた。それぞれの競争種の増殖率をパラメーターとしたとき、パラメーター平面上に、共存定常解が存在するような共存領域を描写することができた。具体的に、共存領域は、それぞれの種の増殖率を横軸と縦軸にとったパラメーター領域上で、端点を同じくする単調増加な二つの曲線で囲まれた領域となる。このとき、共通の端点の座標は、ディレクレ境界条件下でのマイナス・ラプラシアンの最小固有値になる。共存領域を決定する単調増加な二つの曲線は、それぞれの半自明解から共存解が分岐するような点のプロットになっている。

(2) 交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ競争系に対して、ディレクレ境界条件の下で共存定常解が存在するための十分条件（共存領域）を決める二つの曲線は、交差拡散項の係数が増加すると、共存領域が広がるように移動することが分かった。このとき、片方の競争種の交差拡散効果が強くなるように係数を増加させると、(交差拡散効果を固定した）競争相手の増殖率の小さい方に共存領域が広がる。さらに、交差拡散項の係数を無限大に発散させると、共存領域の境界曲線は競争相手の増殖率が最小固有値に等しい直線に漸近することが分かった。この結果は、共存定常解の存在の見地からすると、交差拡散効果が強くなることによって、競争相手がより小さい増殖率でも生存しうることを意味する。即ち、生物種の「競争相手の多い地域から拡散する効果」が強くなると、競争相手は（交差拡散効果のないケースでは全滅してしまうような）微々たる増殖率であっても全滅を免れることができる可能性が数学的に示唆された。このような交差拡散が競争相手の利益誘導となる側面はノイマン境界条件を中心的に扱った既存の研究では報告はなく、ディレクレ境界条件を扱った本研究成果の特徴と考えられる。

(3) 交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ系の定常問題において、ディレクレ境界条件の下で交差拡散を大きくした際の、解の漸近挙動を調べた。その結果、片方の競争種の交差拡散の係数を増加させると、競争相手の定常的な個体数は、交差拡散の逆数レートで減少していくことが分かった。具体的には、交差拡散項の係数を無限大に発散させた場合、競争相手の個体数と交差拡散係数の積が正値関数に収束する。このとき、交差拡散効果のある種の個体数は、それ自体が正値関数に収束する。これらの正値関数が満たす極限系に対しては、解集合の形成する大域的な分岐枝の基本的な構造を得ることができた。極限系の正値解集合は二つの半自明解を結ぶような有界な連結集合を含むが、この連結集合の両端における増殖率は共存領域の境界点に一致する。交差拡散効果のない種の増殖率が最小固有値である境界点においては、その種は固有関数の形状になりつつ交差拡散係数の逆数レートで減退することが分かった。結局、(2)と(3)をまとめると、ディレクレ境界条件の下で、片方の交差拡散係数を増加させると、交差拡散のない競争相手は、より小さい増殖率でも全滅を免れるものの、個体数は交差拡散係数の逆数のペースで減少していくことになる。これらの結果は、ノイマン境界条件下の既存の研究報告には見られないことから、交差拡散を伴うロトカ・ボルテラ系の解構造が境界条件に強く依存することを示唆している。

(4) 移流項を伴うロトカ・ボルテラ競争系において、空間非一様な定常解の存在性を研究した。具体的には、分岐パラメーターである移流項の係数を増加させたとき、定数解から空間的に振動する解が分岐することが分かった。これは、移流の増加によって、競争種の棲み分けに対応する定常パターンが定数解から分岐することを示唆している。また、移流項の係数のみを無限大にすると、定常解は（適当な部分列を経由して）定数解か零解に領域の平均２乗ノルムの位相で収束することが分かった。ここで、零解に収束するケースが起これば、解の最大値は正値に留まり、ルベーグ零集合上で解が針状に尖ることも示された。

(5) 移流項を伴うロトカ・ボルテラ系の定常問題において、ノイマン境界条件の下で、第二式の拡散と移流を一定比にして、ともに無限大にした場合の、解の漸近挙動を調べた。このとき、解の収束先を未知関数とする極限系は、積分条件を伴う楕円型境界値問題として導かれる。とりわけ、領域が円盤領域や一次元区間に単純化されたケースにおいては、二つの未知関数の間に新たなパラメーターγを介した関係式が出現し、境界値問題の常微分方程式は、ロトカ・ボルテラ系の第一式に対応する一本に絞ることができる。第二式の拡散と移流の比率がある値より大きく、二つの関数を繋ぐ上記のパラメーターγがミドルレンジにあるときに限って、単独の常微分方程式の反応項が双安定形になることが

分かった。このとき、ミドルレンジの中をパラメーターγが動くと、双安定な反応項の形状が変化する。具体的には、或る閾値を境にして双安定項の両端の安定性が逆転する。この様相は、第一式の拡散係数が小さいケースにおいては、境界層や内部遷移層をもつ解の存在しうることを示唆している。また、γが閾値を通過する際に、解構造の激変から豊富な解構造が抽出される可能性がある。現在のところ、反応項がより単純な表面科学モデルに対して、同様のアプローチを試み、ロトカ・ボルテラ系に対する解析への準備としている。

(6) 白金板に対する吸着分子のダイナミクスを記述する反応拡散移流系を解析した。上記の(5)と同様のアイデアに基づき、吸着分子の拡散と移流を一定比にして無限大にした際に、白金表面の構造関数と吸着分子の密度関数の収束先を未知関数とする極限系を導いた。この極限系は、双安定な反応項を伴う反応拡散方程式の境界値問題と積分条件から成る。領域を空間1次元の区間に単純化したケースでは、二つの未知関数が新たなパラメーターγを介して関係づけられ、上記(5)のロトカ・ボルテラ系の極限系と類似の構造となっている。表面科学の極限系の非定数定常解の集合が成す大域枝の分岐構造を解明した。特に、境界層と内部遷移層を繋ぐ枝の存在が数学的に証明された。また、パラメーターγと空気圧がある閾値にある状況では、定数解から中心対称な非定数の枝が分岐し、さらにその枝から非対称な解が分岐する二次分岐が理論的に証明された。ここで得られた成果は、移流項を伴うロトカ・ボルテラ系に対する解析にも部分的には適用できた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① <u>Kousuke Kuto</u>, Tohru Tsujikawa, Univesal bound for stationary patterns of an adsorbate-induced phase transition model, Journal of Math-for-Industry, 3, C-9, 69-72, 2011, 査読有り.
https://qir.kyushu-u.ac.jp/dspace/handle/2324/20614

② <u>Kousuke Kuto</u>, Tohru Tsujikawa, Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model I: existence, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 14, no.3 1105-1117, 2010, 査読有り.
DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.1105

③ <u>Kousuke Kuto</u>, Yoshio Yamada, Positive solutions for Lotka-Volterra competition systems with large cross-diffusion, Applicable Analysis, 89, no.7 1037-1066, 2010, 査読有り.
DOI: 10.1080/00036811003627534

〔学会発表〕（計４件）

① <u>久藤衡介</u>, Stationary problem for a reaction-diffusion-advection system in surface chemistry, 日本数学会函数方程式論分科会 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2011年12月18日, 東京大学大学院数理科学研究科.

② <u>久藤衡介</u>, 山田義雄, Coexistence states for the SKT model with large cross-diffusion, 日本数学会総合分科会函数方程式論分科会, 2011年9月28日, 信州大学 松本キャンパス.

③ <u>久藤衡介</u>, 辻川亨, Bifurcation structure of stationary layers for an adsorbate induced phase transition model, 日本数学会総合分科会函数方程式論分科会, 2011年9月28日, 信州大学 松本キャンパス.

④ <u>久藤衡介</u>, 辻川亨, Stationary patterns for an adsorbate-induced phase transition model, 日本数学会総合分科会函数方程式論分科会, 2009年9月26日, 大阪大学 豊中キャンパス

〔その他〕

ホームページ等

http://matha.e-one.uec.ac.jp/~kuto/

６．研究組織

(1)研究代表者

久藤　衡介（KUTO KOUSUKE）

電気通信大学・情報理工学研究科・准教授

研究者番号：40386602

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし