

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月9日現在

機関番号：14302
 研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2008～2012
 課題番号：21740130
 研究課題名（和文）熱水力学に現れる自由境界問題に対する解の制約条件を含む非線形発展方程式の可解性
 研究課題名（英文）Nonlinear evolution equations with constraint related to the free boundary problem on thermohydraulics model
 研究代表者
 深尾 武史（Takeshi Fukao）
 京都教育大学・教育学部・准教授
 研究者番号：00390469

研究成果の概要（和文）：熱水力学に現れる自由境界問題の研究に向けて，流体の方程式に様々な制約条件を付加した問題の可解性の結果を得た．また，変分不等式と発展方程式の関係性を明確にするため時間依存制約付きの抽象発展方程式に対する解の表現定理の結果を得た．流速の大きさを温度に依存して制約する熱水力学に現れるモデルについて可解性の結果を得た．

研究成果の概要（英文）：The solvability and the characterization of a solution for nonlinear evolution equations with constraint are treated. The problem is related to the free boundary problem on thermohydraulics model. The solvability for a system between the variational inequality of Navier-Stokes type and the heat equation is proved.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：発展方程式，熱水力学，Navier-Stokes方程式，仮似変分不等式

1. 研究開始当初の背景

我々は水が温度0度を境にして氷に変化する現象のように，ある温度を境にして物質の状態が劇的に変化する現象をしばしば観察する．これは相転移と呼ばれている現象であり，相の状況の変化により問題を考察する領域も未知となるため，自由境界問題と呼ばれる複雑な問題となる．一般に偏微分方程式の可解性を論じる際，領域の滑らかさが重要な要素となるがこの種の自由境界問題においてはこの点が難しさの1つとなる．一般に温度分布や流速などを記述する偏微分方程式については

それぞれ数学的な研究は数多くなされてるが，それらが複雑に影響し合う連立系で，さらに領域も未知関数に依存する場合には，工学の場面では可解性をひとまず認めてから数値計算で取り扱われることもしばしばあるが，数学的な研究は少ない．そのような非線形性は長年数学で研究されてきた枠組みに収まらないこともある．

2. 研究の目的

本研究は熱水力学に現れる相転移現象を記述する連立の非線形偏微分方程式の初期値境界値問題に対して解の存

在や一意性を証明することで達成される次の2点である。

(1) 工学的な場面で見られる数値計算による熱水力学の現象解明の手法に対して、そこで取り扱われている数理モデルの可解性を数学的に保証すること

(2) 自由境界問題を記述する非線形性を、解の制約条件として方程式に取り入れるならば、指示関数の劣微分を含む発展方程式の手法が連立系でも適用できるか明らかにすること

3. 研究の方法

熱方程式などの単独の方程式の場合、各点の値を制約する両側制約条件付きの問題に対して指示関数の劣微分を含む抽象発展方程式の可解性の結果があるため、その応用を基本的な方法とする。また、必要に応じて時間依存性の抽象理論の拡張を行う。連立系に対しては不動点定理を応用するため、それぞれの方程式に対して十分な解の滑らかさとその一様評価を得ることを第1目標とし、それが得られた後に第2目標として熱水力学に現れる連立系の可解性を議論する。

4. 研究成果

熱水力学に現れる自由境界問題の研究に向けて、流体の方程式に様々な時間依存制約条件を付加した問題の可解性の研究、ならびに時間依存制約条件付きの抽象発展方程式に対する解の表現定理の研究を行った。熱方程式に対する各点の値への両側制約条件を付加した障害物問題では拡散項と制約のための指示関数の劣微分の項との間に角度条件と呼ばれる不等式が重要な役割を果たしている。この条件は単独の方程式特有の性質を利用して証明できることが知られており、一般の流体の方程式に対しては成立が望めない。そこでまずは制約が時間依存で片側の場合について、弱変分不等式による弱い意味の解を導入することでStokes型変分不等式の可解性に関する結果を得た。発散0の条件を近似によって回避することで時間依存性を既存の熱方程式の場合と同様に取り扱えることが明らかになった。

次に3次元Navier-Stokes方程式に向けて流速の大きさに時間依存制約条件を課した場合を考察した。流速の方

式では発散0の条件から一般に時間依存性を取り扱う不等式を得ることが困難であったが、この種の制約条件に対しては比較的簡単に不等式を得られることが明らかになった。これを利用し3次元Navier-Stokes型変分不等式の解の存在と一意性の結果を得た。

さらに熱水力学に現れる自由境界問題へ向けて、この種の変分不等式と熱方程式との連立系を考察した。時間に関する近似を時間履歴に依存する問題と見なしたモデルについて解の存在の結果を得た。

これら流体の方程式の制約問題は変分不等式であり、熱方程式に対する制約問題の先行研究を踏まえれば制約条件を満たしている点ではStokes方程式やNavier-Stokes方程式を意味していると期待されるが自明ではない。そこで不等式と等式の関係性を明確にするため、時間依存制約集合上の劣微分を含む抽象発展方程式の解の表現定理について例えば体積保存条件など制約条件が非局所的な制約を与える場合についてLagrange乗数による抽象的な表現定理を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

1) T. Fukao and N. Kenmochi, A thermohydraulics model with temperature dependent constraint on velocity fields, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser S, to appear, 査読有

2) T. Fukao and N. Kenmochi, Abstract theory of variational inequalities and Lagrange multipliers, to appear in Discrete Contin. Dyn. Syst, supplement, 2013, 査読有

3) T. Fukao and N. Kenmochi, Weak variational formulation for the constrained Navier-Stokes equations, Vol. 1792, pp.57--81 in 京都大学数理解析研究所講究録, 2012, 査読無

4) T. Fukao and N. Kenmochi,
Variational inequality of the
Navier-Stokes equations with time-
dependent constraint,
Vol. 34, pp.87--102 in GAKUTO
Internat. Ser. Math. Appl., 2011,
査読有

5) T. Fukao,
Variational inequality for the
Stokes equations with constraint,
pp.437--446 in Discrete Contin.
Dyn. Syst, supplement, 2011, 査読有

6) T. Fukao and M. Kubo,
Global attractor of double
obstacle problem in
thermohydraulics,
Vol. 32, pp.273--287 in GAKUTO
Internat. Ser. Math. Appl., 2010,
査読有

7) T. Fukao and M. Kubo,
Time-dependent obstacle problem in
thermohydraulics,
pp.240--249 in Discrete Contin.
Dyn. Syst. supplement, 2009, 査読有

[学会発表] (計20件)

1) 深尾武史-剣持信幸,
Characterization of the solution
for evolution equations with time-
dependent constraints,
日本数学会2013年度年会, 2013年3月20
日~23日, 京都大学

2) 深尾武史-剣持信幸,
ある時間依存制約条件を含む発展方
程式の解の表現定理について,
第38回発展方程式研究会, 2012年12月2
2日~24日, 日本女子大学

3) T. Fukao,
On a variational inequality of
Bingham and Navier-Stokes type in
three dimensional space,
5th Polish-Japanese Days on Nonline
ar Mathematics in Interdisciplinary
Sciences - Modellings, Analysis and
Simulations -, 2012年11月5日~9日,
関西セミナーハウス, 京都

4) T. Fukao,
On a variational inequality of
Bingham and Navier-Stokes type in

three dimension,
PDEs for multiphase advanced
materials, 2012年9月17日~21日,
Cortona, Italy

5) T. Fukao and N. Kenmochi,
Abstract theory of the variational
inequality and Lagrange multiplier,
AIMS' 9th International Conference
on Dynamical Systems, Differential
Equations and Applications, 2012年7
月1日~5日, Orland, USA

6) 深尾武史,
ある種の非Newton流体を記述する変分
不等式の可解性について,
日本数学会2012年度年会, 2012年3月26
日~29日, 東京理科大学

7) T. Fukao,
On a variational inequality for a
fluid dynamics of Bingham and
Navier-Stokes type in three
dimension,
CONFERENCE ON Evolution Equations,
Related Topics and Applications, 20
12年3月19日~23日, 早稲田大学

8) 深尾武史-剣持信幸,
流速の制約条件を含む強変分・弱変分
形式とその可解性について,
第37回発展方程式研究会, 2011年12月2
3日~25日, 岐阜大学

9) T. Fukao and N. Kenmochi,
Well-posedness for the variational
inequality related to the Navier-
Stokes equations with time-dependent
constraints,
Analysis of nonlinear evolution
problems: Selected topics in
material and life sciences, 2011年1
1月7日~11日, TU Eindhoven,
Netherlands

10) T. Fukao and N. Kenmochi,
Weak variational formulation for
the Navier-Stokes equations with
time-dependent constraint,
2011年10月24日~26日, 京都大学数理
解析研究所

11) 深尾武史-剣持信幸,
流速の大きさの制約条件に対する変分
不等式の可解性について,
日本数学会2011年度秋季総合分科会, 2

011年9月28日～10月1日, 信州大学

12) T. Fukao and N. Kenmochi,
Variational inequality for the
Navier-Stokes equations with time
dependent constraint,
International Symposium on
Computational Science 2011, 2011年
2月15日～17日, 金沢大学

13) 深尾武史,
流速の大きさの制約条件に対する変分
不等式の可解性について,
第36回発展方程式研究会, 2010年12月2
3日～25日, 中央大学

14) 深尾武史,
流れの制約条件に対する変分不等式,
日本数学会2010年度秋季総合分科会, 2
010年9月22日～25日, 名古屋大学

15) T. Fukao,
Obstacle problem of Navier-Stokes
equations in thermohydraulics,
AIMS' 8th International Conference
on Dynamical Systems, Differential
Equations and Applications, 2010年5
月25日～28日, TU Dresden, Germany

16) 深尾武史,
温度依存制約条件を含むNavier-Stokes
方程式の解の存在について,
日本数学会2010年度年会, 2010年3月25
日～27日, 慶応大学

17) 深尾武史,
温度依存制約条件を含むNavier-Stokes
方程式の解の存在について,
第35回発展方程式研究会, 2009年12月2
3日～25日, 中央大学

18) 深尾武史-久保雅弘,
ある障害物問題の時間局所・大域解と
大域的アトラクターについて,
日本数学会2009年度秋季総合分科会, 2
009年9月24日～27日, 大阪大学

19) T. Fukao-M. Kubo,
Global attractor of double obstacle
problem in thermohydraulics,
Evolution Equations, Related Topics
and Applications, 2009年9月7日～1
日, Munchen, Germany

20) T. Fukao-M. Kubo,
Global attractor for double

obstacle problems in
thermohydraulics,
4th Polish-Japanese Days on Current
advances in applied nonlinear
analysis and mathematical
modelling issues, 2009年5月18日～2
1日, Madralin, Poland

6. 研究組織

(1) 研究代表者

深尾 武史 (Takeshi Fukao)
京都教育大学・教育学部・准教授
研究者番号: 00390469