様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　６月　５日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009　～　2012
課題番号：21740179
研究課題名（和文）
開弦理論の数理と応用
研究課題名（英文）
Mathematical Aspects of Open String Theory and its Applications
研究代表者
藤　博之（Fuji Hiroyuki）
名古屋大学・理学研究科・特任講師
研究者番号：50391719

研究成果の概要（和文）：
本研究は，開弦理論の数理的側面を調べる事により，場の理論の非摂動的側面を探ると同時に，幾何学などの数学の諸分野において新たな知見をもたらす事を目的としている．特に，物理側では重力の量子化における非摂動的側面について格子モデルや AdS/CFT 対応を基に探り，一方数理的には位相的弦理論を基に結び目不変量の可積分構造に関する新たな構造を発見し，さらに圏化から生じる新たな不変量を物理的考察から提案した．

研究成果の概要（英文）：
In this research, I have focused on the mathematical aspects of the open string theory, and studied on the non-perturbative aspects of the quantum field theory and mathematical aspects of the string theory in particular for the relation with the geometry. In the physics side, I have mainly studied on the non-perturbative aspects of the quantum gravity on basis of the lattice model and AdS/CFT. In the mathematics side, I have found a novel quantum integrable structure of the knot invariants based on the topological string theory, and proposed a new topological invariant which arises from the categorification from the view point of the theoretical physics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	300,000	90,000	390,000
2010 年度	400,000	120,000	520,000
2011 年度	400,000	120,000	520,000
2012 年度	300,000	90,000	390,000
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：素粒子理論
科研費の分科・細目：素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理
キーワード：位相的弦理論・開弦理論・量子重力理論

１．研究開始当初の背景
本研究課題申請時には，開弦理論の数理的側面に関する応用として，結び目不変量の解析は知られていたが，体積予想などのトポロジーで知られた幾何学的意味付けに関しては，あまり知られたものではなかった．一方，開弦理論の解析法に関しては，位相的頂点計算や位相的再帰関係式などをはじめとして，新たな形式が当時次々と発見され，これまでの方法では解析が困難な物理量や幾何学的不

変量が具体的に計算できるようになっていた．このように，当時は弦理論と幾何学の双方に著しい進展があったものの，両者の関係はまだあまり着目されていない状況にあった．こうした意味において，新たな分野横断的発見ができる機会が多分にあったのである．

２．研究の目的

本研究は，開弦理論の数理的側面を探ることにより，あらたな数学的応用をもたらすと同時に，物理へのフィードバックをもたらす事を目的としている．

(1) 数理的な側面に関する主な焦点としては，開弦理論の技術を応用して結び目不変量の新たな側面を発見することを目指した．その中でも特に体積予想や圏化に関する弦理論的解釈を基に，色付き Jones 多項式の新たな可積分構造を探り，また結び目不変量の圏化と開弦理論の関係から新たな不変量を提案する事を目的とする．

(2) 一方, 物理へのフィードバックとしては，量子重力理論の非摂動的側面を主な応用の対象とし, AdS/CFT や行列模型を基にして側面を探る事が目的である．これらの理論では，D-ブレーンの枚数に関わるラージ N 極限での新規の現象や数理的側面が大きな役割を果たすので，(1)で得られた成果を応用する事により，量子重力理論の新たな側面を探る事を目指している．

３．研究の方法

(1)色付き Jones 多項式と行列模型：

色付き Jones 多項式の漸近的振る舞いは，体積予想における研究によって，興味深い幾何学的解釈が得られている．一方，位相的 B-模型と呼ばれる弦理論や行列模型においては同様の漸近解析が大きな進展を遂げており，「位相的再帰関係式」と呼ばれている．この手法では，開弦が運動する空間に内在するスペクトル曲線のデータを基に分配関数に関する漸近展開が逐次的に計算される．

そこで，本研究ではこの手法を色付き Jones 多項式の漸近解析（一般化された体積予想）から得られる「A-多項式」によって定義されるスペクトル曲線に適用する事で，色付き Jones 多項式を行列模型的に再定式化できる事を予想し，具体的な計算を基にそれらの奇跡的一致を確かめる事を行った．

(2)結び目不変量の圏化とゲージ理論：

結び目のホモロジーと呼ばれる概念は，トポロジーや表現論における様々な手法を応用する事で発見された新たな研究テーマであり，特にこの１０年で飛躍的進展を遂げている．一方でこうしたホモロジーの弦理論に基づく物理的解釈が存在し，弦理論を指導原理とした進展ももたらされてきた．特にこの数年の精密化された弦理論と BPS 状態の解析に関する進展によって，結び目ホモロジーをより具体的に取り扱う事が可能となった．

そこで自然な応用として考えられる問題として，体積予想を基にこうした結び目ホモロジーから新たな物理的解釈や結び目不変量が得られないかという事が挙げられる．本研究では，こうした視点から結び目の圏化に関する研究を行い，特に結び目ホモロジーの可積分構造に関する研究を推進した．

また，結び目ホモロジーは近年，弦理論の双対性を通じて，超対称ゲージ理論における「表面演算子」のある分岐インスタントンと密接な関係にある事が明らかとなってきた．こうした側面に関しても，研究を行っており多角的に結び目不変量の圏化のより深い理解へ向けて研究を行った．

(3)AdS/CFT 対応と正則アノマリー方程式：

開弦理論の数理的側面の物理的応用としては，AdS/CFT 対応などが挙げられる．AdS/CFT 対応は，ゲージ/重力対応して考えられ，また同時に弦理論の枠組みにおいては開弦理論と閉弦理論との間の関係として記述される．特に AdS/CFT 対応では開弦理論側からもたらされるゲージ理論を用いて，閉弦理論に実現される重力理論を解析する事を可能とし，近年の弦理論の大きな進展の一翼を担う双対性であると言える．

そこで，AdS/CFT 対応をより深く理解する事により，量子重力理論の新たな側面を明らかにできる事が期待される．近年では特に，超対象ゲージ理論の「局所化」と呼ばれる手法が飛躍的に進展し，様々な形で非摂動的解析が可能となっている．特に局所化を通じて得られた分配関数などのラージ N 極限を考えると，そこには行列模型の構造が現れ，数理的側面の研究で扱ってきた手法が思わぬ形で応用できる．本研究では，主に ABJM 模型を通じて，量子重力理論の新たな側面を探った．

(4)ミラー対称性，格子重力，など：

このほかにも開弦理論の数理的側面に関しては，数多くの進展が存在する．中でも「ミラー対称性」に関する研究に関しては，D-ブレーンと行列因子化との間の関係の理解が深まった事により，開弦理論の分配関数までもが解析可能となり，特にコンパクトな Calabi-Yau 多様体上の分配関数までもが実際に計算可能となった．本研究課題では，こうした側面に関しても研究を行っている．

一方，物理的研究に関しては，２次元量子重力理論のあらたな模型として「CDT 模型」と呼ばれる，因果律を保った模型が提唱され，

この分野に新たな研究の方向性がもたらされている．こうしたこの模型の定式化においては，行列模型に基づく弦の場の理論が大きな役割を果たしており，開弦理論の数理的手法が有効であり，新たなクラスの CDT 模型の構築に役立てられる．

４．研究成果

(1)色付き Jones 多項式と位相的再帰関係式:
Dijkgraaf 氏との共同研究では体積予想に基づき，結び目不変量の一つである色付き Jones 多項式の行列模型的定式化を提唱した．Gukov 氏が提唱した体積予想では，色付き Jones 多項式の漸近解析から A-多項式が得られる事を提唱した．この漸近解析の結果を高次項まで含めて調べると，色付き Jones 多項式の漸近的振る舞いは，A-多項式を行列模型のスペクトル曲線と見なしたものと非常に類似の構造がある事が分かる．

そこで，Dijkgraaf 氏との共同研究では，A-多項式を定義方程式として含むような Calabi-Yau 多様体上を運動する位相的 B-模型を考える事で，位相的開弦理論の分配関数として色付き Jones 多項式が得られる事を提唱した．色付き Jones 多項式は，これまで位相的 A-模型を用いて記述できる事が知られていたが，この描像では A-多項式は明確に現れず，体積予想に対しては明確な解釈が与えられない．一方，我々の提唱した位相的 B-模型では，体積予想は自然に実現できるが，色付き Jones 多項式の現れ方は明確でない．

我々の主張は，位相的 B-模型によって色付き Jones 多項式が実現できると予想する事で，古くから知られている色付き Jones 多項式の新たな側面を提唱すると同時に，弦理論としてはこれまで知られていなかった新たな双対性(位相的 A/B-模型の間の関係)を提唱する事となった．最近の Aganagic-Vafa らの研究では，こうした双対性を「D-mirror 対称性」と呼んでいる．

さらに，真鍋氏を含めた Dijkgraaf 氏との共同研究では，漸近展開の高次項が「位相的再帰関係式」によって与えられる事を予想し，実際に非自明な形で対応が存在する事を８字結び目などの具体例を通じて提唱した．実際，我々の研究では，多少 ad hoc な正則化を導入しなければならなかったのだが，その後の Borot-Eynard によるフォローアップの解析によって，位相的再帰関係式に非摂動効果を取り入れる事で，この正則化が解消する事が示され，我々の主張が非自明な形で圏処される事となった．

この研究は，本研究課題の当初からの悲願であり，我々の提唱した予想が世界的な研究者を巻き込んで思わぬ形で進展させる事ができ，満足の結果が得られたと考えている．

(2)結び目不変量の圏化とゲージ理論：
結び目のホモロジーに関する研究はここ数年，弦理論において飛躍的進展を遂げている．特にこれまで具体的な結び目に対してホモロジーを計算する事は困難な状況であったが，物理的原理に基づいた定義や計算法などが提唱され，具体的に手が出せる状況になった．

Gukov 氏，Sulkowski 氏，Stosic 氏との一連の共同研究では，こうした背景を基に，ホモロジーを計算し，トーラス結び目やツイスト結び目などに対する「色付き超多項式」の公式を得る事に成功した．この結果を用いると，(1)で研究を推進した体積予想と同様の解析が，色付き超多項式に対しても具体的に実行する事ができる．そこで我々はさらに，漸近解析を実行し，その結果 A-多項式の一般化に対応する「超-A-多項式」という不変量を導入した．

さらにこの超-A-多項式の量子化についても考察し，そこから超-A-多項式が満たす q-差分方程式が存在する事も発見した．この差分方程式は色付き超多項式の背景に量子か積分構造が存在する事を明示しており，さらにその裏には位相的 B-模型があることを期待させる．

また，粟田氏，菅野氏，真鍋氏，山田氏との共同研究では，4&5 次元ゲージ理論の表面演算子がある場合の分岐スタントンと開弦理論との関係を調べた．こうした問題は当初 AGT 対応を念頭に研究を行ったのであるが，その後の結び目ホモロジーと超対称ゲージ理論との研究の進展によって，実は類似の構造がある事が明らかとなった．こうした形で，本研究では結び目の圏化について多角的に研究する事となったのである．

こうした進展は，当初の計画では思いもかけないような研究の方向性をもたらすこととなり，興味深い様々な結果が得られた．

(3)ABJM 理論と正則アノマリー方程式：
弦理論の非摂動的側面として提唱された M 理論は，AdS/CFT を用いてより詳しく考察できる．こうした側面は「ABJM 理論」によって明確となり，特にゲージ理論側での分配関数の計算が，超対称ゲージ理論の局所化を通じて行列模型に帰着する事が示された．この行列模型は位相的弦理論で解析が進んでいた行列模型の亜種であり，これまでに培ってきた様々な数理的手法が適用できる．

平野氏，森山氏らとの共同研究では，特に正則アノマリー方程式を用いる事により，自由エネルギーの摂動部分が，単純に Airy 関数を用いて決定できる事を導いた．この結果は，この分野の研究において一定のインパクトをもたらし，後に計算機による研究や非摂動効果の研究など，様々な研究がもたらされた．

(4)ミラー対称性，格子重力，など：

この他の側面に関する研究では，まず，鈴木氏，清水氏，中山氏らとの共同研究において，「開ミラー対称性」に関する新たな解析法を提案した．開ミラー対称性の解析では，行列因子化を通じて D-ブレーンの配位を指定し，そこから非斉次項つき Picard-Fuchs 方程式を導く手続きが必要となるが，実際にはかなりの手間が必要となる．こうした側面に関して我々の研究では効果的な解析法を提案し，計算が飛躍的に簡約化する事を具体例を通じて検証した．

次に，２次元量子重力理論に関しては，CDT 模型の一般化へ向けた新たな模型を，佐藤氏，綿引氏らと共同で考察した．それまでの CDT の研究では，物質場のない純粋な重力理論のみを考えていた．しかしながら実際の宇宙は物質に満ちており，物質場を導入する事は量子重力理論を考える上で必要不可欠である．そこで我々の研究では，石橋-川合の模型に基づいて，物質場を導入した CDT 模型を提唱した．石橋-川合の模型は，Dynamical Triangulation に対する重力理論に Ising 模型を導入した有名な模型であり，その手法を CDT 模型に応用したのが我々の模型である．この模型では，空間に対応する１次元ループに色づけを施す事で，物質場の自由度を導入する事ができる．

残念ながらこの模型では，スケーリング極限において非自明な臨界指数が得られなかったため，当初の目的に対しては満足のゆく結果とならなかったが，その後，CDT 模型の研究では物質場の導入が著しい進展を遂げており，その先駆けとなる研究であったと考えている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計８件）

① 藤博之・S.Gukov・M.Stosic・P.Sulkowski
3d analogs of Argyres-Douglas theories and knot homologies
査読あり，Journal of High Energy Physics 1301 (2013) 175-212

② 藤博之,S.Gukov,P.Sulkowski
Super-A-polynomial for knots and BPS states
査読あり，Nuclear Physics, B867 (2013) 506-546

③ 粟田英資・藤博之・菅野浩明・真鍋征秀・山田泰彦
Localization with a Surface Operator, Irregular Conformal Blocks and Open Topological String
査読あり，Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 16 (2012) 1-80.

④藤博之・佐藤勇貴・綿引芳之
Causal Dynamical Triangulation with Extended Interactions in 1+1 Dimensions
査読あり，Physics Letters, B704 (2011) 582-589

⑤藤博之・中山真作・清水将英・鈴木久男
A Note on Computations of D-brane Superpotential
査読あり，Journal of Physics A44 (2011) 465401-465443

⑥藤博之・平野信司・森山翔文
Summing Up All Genus Free Energy of ABJM Matrix Model
査読あり，Journal of High Energy Physics 誌 1108 (2011) 001-016.

⑦Robbert H.Dijkgraaf・藤博之・真鍋征秀
The Volume Conjecture, Perturbative Knot Invariants, and Recursion Relations for Topological Strings
査読あり，Nuclear Physics B849 (2011)166-211

⑧ Robbert H.Dijkgraaf・藤博之
The Volume Conjecture and Topological Strings
査読あり，Fortschritte der Physik, 57 (2009) 825-856

〔学会発表〕（計１５件）

①藤博之
Volume Conjecture and Colored Superpolynomials
招待講演，Workshop"Synthesis of integrabilities in the context of duality between the string theory and gauge theories" Steklov Institute of Mathematics （ロシア）
2012年９月

②藤博之
結び目不変量と量子場の理論
招待講演，"Summer School 数理物理 2012" 東京大学数理科学研究科
2012年９月

③藤博之
Superpolynomial and Physics
招待講演，研究集会「離散的手法による場と時空のダイナミクス」理化学研究所
2012年８月

④藤博之
体積予想と Chern-Simons 理論
招待講演，研究集会"場の理論と弦理論"京都

大学基礎物理学研究所

2012年7月

⑤藤博之
On asymptotic limit of superpolynomials
招待講演, International Conference "String-Math 2012," University of Bonn (ドイツ)

2012年7月

⑥藤博之
Volume Conjecture, QFT, Strings
招待講演, 研究集会"静岡集中セミナー" 静岡大学

2012年6月

⑦藤博之
The Volume Conjecture and Topological Strings
招待講演, 研究集会"New Recursion Formula and Integrability for Calabi-Yau Spaces" Banff International Research Station(カナダ)

2011年11月

⑧藤博之
Topological String and Related topics
招待講演, 研究集会"量子可積分系の新展開2" 富士研修所
2011年9月

⑨藤博之
Surface Operator and Topological String
招待講演, Conference "Low dimensional topology and number theory III"
九州大学

2011年3月

⑩藤博之
Volume Conjecture and Topological String
招待講演, Conference "Taiwan String Winter School"
台湾東海大学

2010年12月

⑪藤博之
三次元重力理論と体積予想
招待講演, 基礎物理学研究集会「離散的手法による場と時空のダイナミクス」
2010年9月 基礎物理学研究所

⑫藤博之
Volume Conjecture and Topological Recursion
招待講演, Conference "Low dimensional topology and number theory II"
東京大学数理科学研究科

2010年3月

⑬藤博之
Volume Conjecture and Topological Recursion
招待講演, 研究集会「KEK 理論研究会２０１０」高エネルギー加速器研究機構
2010年3月

⑭藤博之
Volume Conjecture and Topological Recursion
招待講演, Workshop "RecentAdvances in Gauge Theories and CFTs"Yukawa Institute, Kyoto Univ.
2010年3月

⑮藤博之
On Computation of Disk Instantons-B-model Approach-
招待講演, YITP Seminar Series」 基礎物理学研究所
2009年3月

〔図書〕(計１件)
① 藤博之
体積予想と量子場の理論
数理科学 2012年 1月号 No.583 サイエンス社 30ー35.

〔産業財産権〕
○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　藤　博之（FUJI HIROYUKI）
　名古屋大学・理学研究科・特任講師
　研究者番号：50391719

(2)研究分担者なし
　（　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者なし
　（　　）

　研究者番号：