

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 6日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21740285

研究課題名（和文）確率的レーブナー方程式および共形場理論を用いた2次元臨界確率過程の研究

研究課題名（英文）Studies of two dimensional critical stochastic process by stochastic Loewner evolution and conformal field theory

研究代表者

塚 和光 (SAKAI KAZUMITSU)

東京大学・大学院総合文化研究科・助教

研究者番号：10397028

研究成果の概要（和文）：リー環対称性をもつ多重確率的レーブナー発展の定式化を行った。また、多成分非対称単純排他過程とよばれる1次元確率過程模型の研究を行い、そのスペクトル構造の詳細を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We have formulated a multiple version of the Stochastic-Loewner Evolution for conformal field theory with Lie algebra symmetry. Also the structure of spectrum for a multi-species asymmetric simple exclusion process on a ring have been investigated in detail.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：確率的レーブナー方程式、SLE、確率過程、共形場理論、可積分系、可解模型、厳密解、ペーテ仮説

1. 研究開始当初の背景

研究目的の項で詳述するが、研究開始当初、2次元の臨界的な確率過程を記述する発展方程式として、stochastic Loewner evolution(SLE)が提出され、それらに関連する研究がはじめられていた。一方で2次元臨界現象を記述する理論として共形場理論(CFT)があるが、SLEとCFTのひとつ、ミニマル模型との対応が詳細に調べられていた。ところが、非ミニマル模型との対応や、関連する可解模型との対応はほとんど未解明の状況であった。これを動機として、非ミ

ニマル模型のひとつであるWess-Zumino-Witten模型に対応するSLEの研究を主として行った。

2. 研究の目的

臨界イジング模型の+および-スピンのなすクラスター境界線や、臨界密度におけるパーコレーションなどは、共形不変性を持つフラクタル曲線をなすことが知られている。最近、2次元において、これらの曲線はstochastic Loewner evolution (SLE) とよばれる方程式で系統的に記述されることがわ

かってきた。一方、2次元臨界現象を記述する理論として共形場理論(CFT)があり、対応する可解模型の存在も無数に知られている。ところが、SLEとCFTおよび可解模型の対応関係には未解明な部分が多く残されている。本研究課題の主目的は、これらをつなぐ数理構造をより明確にすることにある。さらに関連して可積分系や確率過程模型の研究を行う。

例えば、臨界点でのイジングスピンのドメイン境界線や、臨界密度におけるパーコレーション・クラスターの境界線、またある種のランダムウォークなどは、(スケーリング極限において)典型的なフラクタル曲線をなす。一般的に、このような曲線の構造は並進、回転、スケール変換といった共形変換に対して不変に保たれる。驚くべきことに、共形変換が複素関数論と対応付けられる2次元においては、これらのフラクタル曲線が、stochastic Loewner evolution (SLE) と呼ばれるただひとつの微分方程式によって、統一的に記述されることがわかってきた。SLEは1次元ブラウン運動を駆動関数とし、拡散係数に相当する κ を唯一のパラメータとして持つ(以下SLE κ と書く)。特筆すべきは、SLE κ は、パラメータ κ の値に応じて、本質的に異なる曲線を描き出すことである。例えば、 $\kappa = 16/3$ はイジング模型の相境界、 $\kappa = 6$ は臨界パーコレーションに対応する。さらにまた、SLEと確率解析を組み合わせることにより、個々の系を直接的に扱ったのでは得ることが困難な、曲線の交叉確率(ある点から出発した曲線がある境界の指定されたドメインに到達する確率)や、フラクタル次元($df = 1 + \kappa/8$)などが厳密に計算される。一方、臨界現象における共形不変性は古くから期待された概念である。特に、2次元においては、共形変換の生成子は無限次元の代数をなし、理論に強い制約が課される。これにより2次元共形場理論(CFT)は、2次元での臨界現象を記述する非常に強力な理論となっている。最近、このCFTのひとつである $c \leq 1$ ミニマル模型(c は中心電荷)とSLE κ の対応が明らかにされ、SLEは共形場理論の幾何的な側面を表すものとして捉えることができるようになってきた。

ところが、これまでのところ、解明された対応関係は限定的であり、未解明の部分が多く残されている。一般には、 $c > 1$ 非ミニマル模型で記述される多くの臨界現象が知られているが、SLEとの対応は明確ではない。他方、非ミニマル模型で記述される可解模型の存在が系統的に知られているが、臨界点でのスピニングが形成するドメイン壁が果たしてSLEで記述されるかも定かではない。

これらをふまえ、本研究課題の目標のひとつ

は、SLEとCFT/可解模型対応の数理構造を明確にすることである。まず、その足がかりとして、 $c > 1$ 非ミニマル模型の代表例のひとつである、Wess-Zumino-Witten (WZW)模型とSLEとの対応関係を調べる。 $c \leq 1$ ミニマル模型の中核をなすのがヴィラソロ代数と呼ばれる無限次元の代数であり、通常のSLEはこの構造を有する。一方、WZW模型はアフィンリー代数と呼ばれる無限次元代数を対称性として持つ。この代数の構造を持つように、SLEを多成分なバージョンに拡張することによって、WZW模型との対応付けを行う。これによりWZW模型で記述される臨界現象のフラクタル次元などが明らかになる。さらにこれらの研究に基づいて、SLE曲線が複数存在する場合、すなわち多重SLEへの拡張を行う。

3. 研究の方法

本研究は、stochastic Loewner evolution (SLE)と共形場理論(CFT)および可解格子模型の対応を用いて、2次元臨界確率過程の数理構造を研究するものである。具体的に、

- (1) SLE κ と $c > 1$ 非ミニマルCFT模型の数理構造の研究
- (2) 非ミニマル模型に関連するSLEの多重版の構築。
- (3) 可積分系や可解確率過程模型に関する研究

の3つを主テーマに据え研究を遂行する。具体的に、(1)、(2)では、非ミニマル模型のひとつであるWess-Zumino-Witten模型に対応するSLEの研究を行い、多重SLEへの拡張を行う。また、(3)では、1次元の可解確率過程模型および非平衡統計力学模型のひとつである、多成分非対称単純排他過程のマルコフ行列のスペクトル構造の研究を代数的ベータ仮設法を用いて行う。また、非対称単純排他過程の動的性質をベータ仮設を用いて行う。

4. 研究成果

- (1) 非ミニマル模型に関連するSLE

確率的レーブナー方程式(SLE)とWess-Zumino-Witten(WZW)模型との関係を研究した。これまでのところ、SLEと共形場理論(CFT)との対応に関しては、ミニマル模型との対応が主として研究されていた。我々は最近の関連研究の進展に触発され、SLEと任意のリー環対称性を持つWZW模型との対応の研究を行った。さらに、SLEで描かれる曲線が複数ある多重SLEの定式化を行った。

これを達成するためには、2次元の幾何的な確率過程とあわせて、リー群上で定義され

る確率過程を考慮する必要がある。そのリー群上で定義される SLE を構築し、通常の幾何的な SLE と連立させることにより、リー環対称性を有する SLE を定式化した。

とくに、多重 SLE の場合、SLE 曲線どうしが相互作用するため、通常の SLE では現れないドリフト項が出現することを明らかにした。これらの定式化は、曲線配置のトポロジーなどより多様な臨界現象の幾何的側面の記述を可能にするものである。

(2) 多成分非対称単純排他過程のスペクトル構造

確率過程のマスター方程式を、シュレーディンガー方程式とみなせば、そのマルコフ行列は量子系のハミルトニアンとみなすことができる。これにより、1次元多粒子確率過程模型は、ある種の1次元量子スピン系とみなすことができる。最近我々は、これまでの研究で培われた厳密解の手法を適用することにより、非対称単純排他過程と呼ばれる模型の動的特性を解析した。特に、系を構成する粒子の種類が複数ある多成分系に対する一般論を構築することに成功した。

特に系のダイナミクスを詳細に解析することにより、この系が Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 型のユニバーサルリティクラスに属することをはじめ明らかにした。さらに、マルコフ行列の構造を詳細に調べ、その複素スペクトルは poset 構造を持ち双対性を明らかにした。

(3) 非対称単純排他過程の動的性質

代数的ベータ仮設を用いて、完全非対称単純排他過程と呼ばれる確率過程模型の動的性質の研究を行った。粒子が片側半分詰まった状態を初期状態として、局所密度およびカレントを代数的ベータ仮設の手法を用いて解析した。さらに有限サイズ補正を調べることで、局所密度およびカレントの振幅の漸近形を詳細に解析した。とくに、局所密度の振幅のスケーリング指数は $-3/2$ 、対して、カレントのそれは -1 となることを初めて明らかにした。

(4) 1次元スピンレスフェルミオン模型の動的性質

1次元スピンレスフェルミオン模型の相関関数の研究に基づき、この系の動的性質を研究し、そのスペクトル関数を厳密に計算した。

すなわち、ベータ仮設によるフォームファクターの厳密解を用いてスペクトル関数の解析を行った。この研究により、高エネルギー

領域におけるストリング解(束縛状態)の本質的な寄与が明らかになった。

(5) フェルミ冷却原子気体の厳密解析

光学格子にトラップされた原子気体の最近の理論・実験研究の進展に触発され、可積分1次元スピン1/2 フェルミ原子気体の研究を行った。特に斥力相互作用をもつフェルミ原子気体の低温状態の解析、および相関関数の漸近的振る舞いを共形場理論とベータ仮設の方法により厳密に計算した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

① K. Motegi, K. Sakai, J. Sato, Exact Relaxation Dynamics in the Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, Phys. Rev. E 85 (2012) 042105 査読有

② I. Umegaki, H. Tanaka, T. Ono, M. Oshikawa, K. Sakai, Thermodynamic properties of quantum sine-Gordon spin chain system KCuGaF6, Phys. Rev. B 85 (2012) 144423 査読有

③ J. Y. Lee, X. W. Guan, K. Sakai, M. T. Batchelor, Thermodynamics, spin-charge separation and correlation functions of spin-1/2 fermions with repulsive interaction, Phys. Rev. B 85 (2012) 085414 査読有

④ 堺和光、可積分系とベータ仮説、数理科学 2011年2月号 19-26 査読無

⑤ M. Kohno, M. Arikawa, J. Sato, K. Sakai, Spectral Properties of Interacting One-Dimensional Spinless Fermions, J. Phys. Soc. Jpn. 79 (2010) 043707 査読有

⑥ C. Arita, A. Kuniba, K. Sakai, T. Sawabe, Spectrum in multi-species asymmetric simple exclusion process on a ring, J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 345002 査読有

[学会発表] (計10件)

① 堺和光、WZV 模型に付随する多重確率的レーブナー発展、日本物理学会第67回年次大会、2012年3月26日、関西学院大(兵庫)

② 茂木康平、堺和光、佐藤純、代数的ベータ仮説法を用いた ASEP のダイナミクスの解析、日本物理学会第67回年次大会、2012年3月24日、関西学院大学(兵庫)

③ 梅垣いづみ、田中秀教、小野俊雄、押川正毅、堺和光、一次元量子 sine-Gordon スピン系 KCuGaF6 における励起ギャップの磁場依存性、日本物理学会 秋季大会、2011年9

月 22 日、富山大学 (富山)

④ K. Sakai, Stochastic Loewner Evolutions with Lie algebraic symmetries, Infinite Analysis 11 -Frontier of Integrability, 2011 年 7 月 27 日、東京大学 (東京)

⑤ K. Sakai, Dynamical correlation functions of the XXZ model at finite temperature, Workshop on correlation functions of quantum integrable models, 2011 年 9 月 9 日, ブルゴーニュ大学 (ディジョン: フランス)

⑥ 梅垣いづみ、小野俊雄、田中秀数、押川正毅、堺和光、一次元量子スピン系 $KCuGaF_6$ の比熱と sine-Gordon 理論、2010 年 9 月 23 日、大阪府立大学 (大阪)

⑦ 堺 和光、Wess-Zumino-Witten 模型に付随する SLE、日本物理学会 秋季大会、2010 年 9 月 24 日、大阪府立大学 (大阪)

⑧ K. Sakai, Stochastic Loewner evolutions with Lie algebraic symmetries, The IUPAP 24st, International Conference on Statistical Physics (STATPHYS 24), 2010 年 7 月 19 日、ケアンズ (オーストラリア)

⑨ 堺和光、引力相互作用をもつ 1 次元フェルミ原子気体の厳密解析、2010 年 3 月 21 日、岡山大学 (岡山)

⑩ 有川晃弘、佐藤純、河野昌仙、堺和光、1 次元スピンレスフェルミオン系のスペクトル関数、日本物理学会 秋季大会 2009 年 9 月 28 日 熊本大学 (熊本)

ホームページ等

<http://researchmap.jp/kazumitsu-sakai>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堺 和光 (SAKAI KAZUMITSU)
東京大学・大学院総合文化研究科・助教
研究者番号：10397028

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：