

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月24日現在

機関番号：32675

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21760063

研究課題名（和文）超離散化法による可積分セルオートマトンの解析と非可積分系への応用

研究課題名（英文）Analysis for integrable cellular automata by ultradiscretization method and its applications to non-integrable systems

研究代表者

磯島 伸（ISOJIMA SHIN）

法政大学・理工学部・准教授

研究者番号：90422394

研究成果の概要（和文）：通常の超離散化の手続きを拡張した符号付き超離散化を提案し、これを用いて q 差分パインレヴェ II 型方程式の超離散類似およびその特殊解系列の構成などの可積分セルオートマトンに関する成果を得た。超離散系において振動現象を表す解の構成、代数幾何学の手法に基づく箱玉系のソリトン解の導出などの通常の超離散化を用いる研究成果も得た。また、交通流モデルの超離散化、超離散系に対するカルマンフィルタの構築といった非可積分系に対する成果を得た。

研究成果の概要（英文）：We proposed a procedure ‘ultradiscretization with parity variables’, which is an extended version of usual ultradiscretization method. By means of this procedure, we obtained various results on integrable cellular automata, for example, construction of an ultradiscrete analog of the q -Painlevé II equation and a class of its special solutions. We studied oscillatory solutions of ultradiscrete systems, derivation of soliton solutions to the Box and Ball system based on an algebro-geometric method and so on by usual ultradiscretization method. We also investigated an ultradiscrete analog of the optimal velocity model and Kalman filter for a piecewise-linear system, which are non-integrable systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：非線形可積分系

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎、工学基礎

キーワード：数理物理、可積分系、セルオートマトン、超離散化

1. 研究開始当初の背景

様々な現象を理解する数理科学的手法として、微分方程式による現象の数理モデル化がよく行われる。近年では、全ての変数が離散値を取る系であるセルオートマトンを用いて数理モデルを構築する手法も重要にな

っている。

超離散化とは、与えられた差分方程式の従属変数を離散化してセルオートマトンに変換する極限操作である。超離散化によって、連続変数を扱う微分方程式と、離散変数を扱うセルオートマトンに直接の対応関係を与

えることができる。超離散化の研究は主に可積分系を対象として進められ、構成されたセルオートマトンは可積分系の数理解造を保存していることから、可積分セルオートマトンと呼ばれる。しかしながら、超離散化を行うためには元となる差分方程式の解が正值であることが必要である。この制約は「負の困難」と呼ばれている。

2. 研究の目的

- (1) 従来の超離散化の手続きを拡張し、正值とは限らない解を持つ差分方程式を超離散化する手法を提案する。この手法を可積分方程式に適用し、その有効性を確認すると共に、従来の超離散化の研究を拡張した結果を得る。
- (2) 非線形可積分系の理論においては、解が行列式で表される構造を持つことが要点となっていることが多いが、行列式は減算を含むためその超離散化は困難である。このように、「負の困難」のために未解決であった可積分セルオートマトンの数理解造の解明を目指す。
- (3) 超離散化の手法のより広範な応用を目指して、非可積分系に対する超離散化の手法の有効性を調べる。

3. 研究の方法

- (1) 従来の超離散化の手続きを拡張した「符号付き超離散化」を提案する。これを離散超幾何方程式、離散パルヴェ方程式、離散ソリトン方程式などの可積分方程式に適用し、その有効性を確認すると共に、問題点を探る。
- (2) 非可積分系に対して超離散化の手続きを施す。得られたセルオートマトンを解析し、元の系の解の特徴的な挙動が保存されているか検証する。

4. 研究成果

(1) 超離散系における振動解

線形方程式に対応する超離散系において振動現象を記述する解を発見し、この解は底が負の数である指数関数に由来することを明らかにした。また、この考え方を非線形方程式に拡張し、超離散サイン-ゴールドン方程式が、ブリーザー解と呼ばれる振動現象を表す解に相当する厳密解を持つことを示した。

超離散系において振動現象を記述する解はわずかな例しか報告されていない。本研究は、今後様々な非線形差分方程式へ同様の試みが行われたとき、先行研究として重要な位置を占めることが期待される。[10, 11]

(2) 交通流モデルの超離散化

交通流モデルの1つである最適速度モデルの超離散類似を構成した。得られたセルオートマトンについて、ソリトン理論を応用して衝撃波解に相当する厳密解を得た。また、

数値解析を行い、自由走行状態と渋滞状態を再現すること、密度-流量図に単峰形の分布が見られることを示した[9]。

これらは交通流モデルにおいて見られる基本的な数理現象であり、得られたセルオートマトンが交通流のモデルとなり得ることを意味する。従って、本研究は、非可積分系に対する超離散化によって元の方方程式が持つ基本的な性質が保持されていることを示す具体例となっている。

(3) 符号付き超離散化による特異点閉じ込めテストの超離散化

従来の超離散化の手続きを拡張した「符号付き超離散化」を提案し、これを用いて、差分方程式の可積分性判定法として研究されている「特異点閉じ込めテスト」の超離散類似を構築した。非可積分系も含めた複数の具体例に対して新しいテストを適用し、差分系と超離散系において矛盾する結果は見られないことを確認した[5, 8]。

超離散系に対する特異点閉じ込めテストの類似物はこれまでも提案されているが、従来の超離散化では負の符号を扱えないことから、差分方程式に対するテストとの直接の対応関係はなかった。この成果は、可積分方程式の符号付き超離散化により得られる系が、やはり可積分セルオートマトンと考えられることを示唆している。

(4) 符号付き超離散化による超離散パルヴェ方程式とその特殊解系列の構成

① q 差分パルヴェ II 型方程式は、差分エアリー方程式の解を成分とする行列式によって表される特殊解の系列を持つ。差分エアリー方程式の解は、微分方程式のエアリー方程式と同様に符号を変えながら振動する挙動を示す。 q 差分パルヴェ II 型方程式に符号付き超離散化の手法を適用し、その超離散類似を構築すると共に、その特殊解の系列の厳密な表示式を得た[6, 7]。差分系における特殊解系列と、超離散系における特殊解系列との直接の対応も考察し、行列式を直接評価して解の極限を得ることに成功した[4]。また、副産物として制限付き分割数に対する無限個の非自明な関係式を得た。

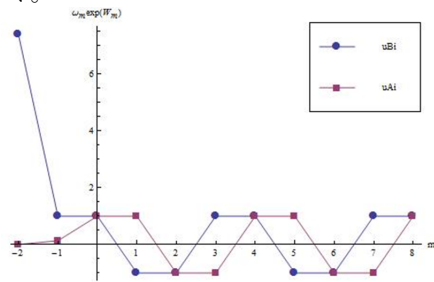
この研究は、符号付き超離散化が差分方程式の符号が変化する厳密解の構造を保存すること、得られる系が豊かな解空間を持つことを示唆している。また、行列式を直接評価する手法は、可積分セルオートマトンの数理解造の解明へ発展することが期待される。

② 差分ベッセル方程式の符号付き超離散類似を構成し、ベッセル関数に対応する特殊解を得た[3]。

差分パルヴェ III 型方程式は差分ベッセル方程式の解を成分とする行列式によって表される特殊解を持つため、①に類似した結果を得ることを目指して非線形方程式への

拡張を進める。

今後、①、②の結果を他の q 差分パルヴェエ方程式へ拡張し、超離散パルヴェエ方程式系の数理解の解明に向けて研究を進めていく。



図：符号付き超離散エアリー方程式の解

(5) 超離散系に対するカルマンフィルタの構築

超離散化の応用に向けて、ある形の超離散系に対するカルマンフィルタを構成した[2]。

今後は、与えられた非線形方程式を超離散化して得られる系を元の方程式の近似系として採用し、超離散カルマンフィルタを用いて評価した推定量を元の方程式に還元するという応用を目指して研究を推進する。

(6) 代数幾何学的手法による箱玉系のソリトン解の導出法

可積分セルオートマトンの1つである開放端箱玉系のソリトン解の明示式を、代数幾何学的手法に基づいて導出した[1]。

箱玉系の解の導出については様々な方法が知られており、異なる数学分野の対応関係を理解するために重要な対象である。本研究はそこに新たな知見を付け加えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

[1] S. Iwao, H. Nagai and S. Isojima, ``Tropical Krichever construction for the non-periodic box and ball system'', J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 45, No. 39 (2012) 395202 (14pp), 査読有. [doi:10.1088/1751-8113/45/39/395202]

[2] 白瀬裕己, 磯島伸, 薩摩順吉: 超離散系におけるカルマンフィルタ, 研究集会報告「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用—」 23A0-S7, 九州大学応用力学研究所, 2012年3月, pp. 147--152, 査読有.

[3] 奈良崎史貴, 磯島伸, 薩摩順吉: 符号付き超離散 Bessel 方程式とその特殊解について, 研究集会報告「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用—」 23A0-S7, 九

州大学応用力学研究所, 2012年3月, pp. 96--101, 査読有.

[4] S. Isojima, J. Satsuma and T. Tokihiro: ``Direct ultradiscretization of Ai and Bi functions and special solutions for the Painlevé II equation'', J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 45, No. 15 (2012) 155203 (13pp), 査読有. [doi:10.1088/1751-8113/45/15/155203]

[5] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani and B. Grammaticos: ``Do ultradiscrete systems with parity variables satisfy the singularity confinement criterion?'', J. Math. Phys., Vol. 53, issue 2 (2012) 023510 (24pp), 査読有. [doi:10.1063/1.3682229]

[6] S. Isojima and J. Satsuma: ``A class of special solutions for the ultradiscrete Painlevé II equation'', SIGMA, Vol. 7 (2011) 074 (9pp), 査読有. [doi:10.3842/SIGMA.2011.074]

[7] S. Isojima, T. Konno, N. Mimura, M. Murata and J. Satsuma: ``Ultradiscrete Painlevé II equation and a special function solution'', J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 44, No. 17 (2011) 175201 (10pp), 査読有. [doi:10.1088/1751-8113/44/17/175201]

[8] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata and J. Satsuma: ``Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables'', J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 42, No. 31 (2009) 315206 (7pp), 査読有. [doi:10.1088/1751-8113/42/31/315206]

[9] M. Kanai, S. Isojima, K. Nishinari, T. Tokihiro: ``Ultradiscrete optimal velocity model: A cellular-automaton model for traffic flow and linear instability of high-flux traffic'', Phys. Rev. E, Vol. 79, issue 5 (2009) 056108 (8pp), 査読有. [doi:10.1103/PhysRevE.79.056108]

[10] S. Isojima, T. Konno and J. Satsuma: ``On oscillatory solutions in ultradiscrete system'', in RIMS Kôkyûroku Bessatsu B13, ``Expansion of Integrable Systems'' (ed. A. Nobe, 2009) pp. 85--93, 査読有.

[11] S. Isojima and J. Satsuma: "On oscillatory solutions of the ultradiscrete Sine-Gordon equation", JSIAM Letters, Vol.1 (2009) pp.25--27, 査読有.

[学会発表] (計 14 件)

1. 礪島伸, 薩摩順吉, 時弘哲治: 符号付き超離散 A_i 関数と制限付き分割数, 日本数学会 2013 年度年会, 京都大学吉田キャンパス, 2013 年 3 月 22 日.

2. Shin Isojima: On ultradiscretization with parity variables, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2013 (poster talk), Kyoto University, Research Bldg. No.8, Kyoto, Japan, 2013 年 3 月 18 日.

3. 礪島伸: 超離散戸田方程式の振動解について, 日本応用数理学会 2012 年度年会 応用可積分系 OS, 稚内全日空ホテル, 2012 年 8 月 29 日.

4. 礪島伸, 薩摩順吉, 時弘哲治: qA_i 関数の超離散極限と分割数, 日本応用数理学会 2012 年研究部会連合発表会, 九州大学伊都キャンパス, 2012 年 3 月 9 日.

5. 奈良崎史貴, 礪島伸, 薩摩順吉: 符号付き超離散 Bessel 方程式とその特殊解について, 研究集会「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用—」, 九州大学応用力学研究所, 2011 年 10 月 29 日.

6. 白瀬裕己, 礪島伸, 薩摩順吉: 超離散系におけるカルマンフィルター, 研究集会「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用—」ポスターセッション, 九州大学応用力学研究所, 2011 年 10 月 28 日.

7. 礪島伸, 薩摩順吉: 符号付き超離散 Painlevé II 型方程式の特殊解の系列, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 信州大学松本キャンパス, 2011 年 9 月 30 日.

8. 礪島伸, 薩摩順吉: 超離散パンルヴェ II 型方程式の様々な特殊解系列, 日本応用数理学会 2011 年度年会 応用可積分系 OS, 同志社大学今出川キャンパス, 2011 年 9 月 14 日.

9. Shin Isojima: Ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables and a class of its special function solutions, The 7th IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave

Phenomena: Computation and Theory, The University of Georgia, Center for Continuing Education, Athens, Georgia, USA, 2011 年 4 月 4 日.

10. 礪島伸, 薩摩順吉: 超離散パンルヴェ II 型方程式の Airy 関数型の解, 日本応用数理学会 2011 年研究部会連合発表会, 電気通信大学, 2011 年 3 月 7 日.

11. 礪島伸, 今野智之, 三村尚之, 村田実貴生, 薩摩順吉: 符号付き超離散パンルヴェ II 型方程式とその特殊解の系列について, 研究集会「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化—」, 九州大学応用力学研究所, 2010 年 10 月 30 日.

12. 三村尚之, 礪島伸, 村田実貴生, 薩摩順吉, A. Ramani, B. Grammaticos: 超離散特異点閉じ込めテストと方程式の可積分性について, 研究集会「非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化—」, 九州大学応用力学研究所, 2010 年 10 月 28 日.

13. 礪島伸, 今野智之, 三村尚之, 村田実貴生, 薩摩順吉: 超離散パンルヴェ II 型方程式とその特殊解の系列について, 日本応用数理学会 2010 年度年会ポスターセッション, 明治大学, 2010 年 9 月 7 日.

14. 三村尚之, 礪島伸, 村田実貴生, 薩摩順吉: 超離散特異点閉じ込めテストと方程式の可積分性について, 日本応用数理学会 2010 年度年会ポスターセッション, 明治大学, 2010 年 9 月 7 日.

[その他]

ホームページ等

学会発表 6. はベストポスター賞を受賞。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

礪島伸 (ISOJIMA SHIN)

法政大学・理工学部・准教授

研究者番号: 90422394

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: