様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月２３日現在

機関番号：10101
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2009～2010
課題番号：21840002
研究課題名（和文）多様体の微分同相群、埋め込みの空間の位相幾何学

研究課題名（英文）Topology of the group of diffeomorphisms and the spaces of embeddings of manifolds

研究代表者
渡邉 忠之（WATANABE TADAYUKI）
北海道大学・大学院理学研究院・助教
研究者番号：70467447

研究成果の概要（和文）：球面をファイバーとする可微分ファイバーバンドルの分類問題について研究した。筆者は２次元球面上の奇数次元球面をファイバーとするファイバーバンドルの「代数的障害類」を定義し、ファイバーが７次元以上で、障害類が消えているならば、そのファイバーバンドルが自明になっていることを示した。また、ファイバーが５次元で、障害類が消えているならば、そのファイバーバンドルは２次元球面の埋め込みの族と、ある離散アーベル群の元によって具体的に表示されることを示した。これによって、ファイバーバンドルの分類が、代数の問題と埋め込みの族の分類問題に帰着された。

研究成果の概要（英文）：The author studied the classification problem of smooth fiber bundles with fiber diffeomorphic to the sphere. He defined “algebraic obstructions” for fiber bundles over 2-sphere with fiber diffeomorphic to odd dimensional sphere and showed that if the fiber dimension is at least 7 and if the obstructions vanish then the fiber bundle is in fact trivial. He also showed that if the fiber dimension is 5 and if the obstructions vanish then the fiber bundle is presentable by a family of embeddings of 2-spheres and an element of some discrete abelian group. Thus the classification of sphere bundles is reduced to an algebraic problem and the classification of families of embeddings.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	850,000	255,000	1,105,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,550,000	465,000	2,015,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：ファイバー束、微分同相、埋め込み、Morse 理論、代数的 K 理論

１．研究開始当初の背景

球面をファイバーとする可微分ファイバーバンドルの研究は、１９６０年代のスメール、セルフ等によるモース理論的研究から始まり、様々な重要な結果が得られていた。その多くは安定領域と呼ばれる、ファイバーの次元が低空間の次元に比べて十分大きい範囲におけるもので、そこではファイバーバンドル（の有理同値類）が代数的 K 理論と大変相性がよいことが知られており、それに関連する研究が現在も盛んに行われている。その一方で、安定領域の外でどうなっているかはほとんど未知であった。

筆者は２００７年に、コンツェビッチが構

成した特性類が計算できる具体的なファイバーバンドルを大量に構成し、非安定領域においても非自明な元が大変豊富に存在していることを発見した。分類問題の解決のためには、同値類の集合の上界と下界を与え、それらの一致を示すことが必要である。筆者の発見は非常に大きな下界を与えたことになり、それは分類問題の解決のための重要な一歩と考えられる。

また、この１０年の間に、多様体の埋め込みの空間のホモトピー型に関する重要な研究がアメリカの研究者等により活発に行われていた。特に、埋め込みの空間の中でも基本的であるユークリッド空間から別のユークリッド空間への埋め込み全体のなす空間の有理ホモロジーが、ある種の有限的なモデルで記述できるという著しい進展が得られていた。さらに筆者は、信州大学の境圭一氏との共同研究で、高次元のユークリッド空間から別のユークリッド空間への埋め込みの空間の有理ホモロジーと、ある種のファインマン図式（グラフ）の間の関係を見出していた。これらを合わせて考えると、ユークリッド空間から別のユークリッド空間への埋め込みの空間の有理ホモロジーは、ある種のグラフに関して組合せ的に定義されるコホモロジーに一致している（したがって、コホモロジーが具体的に計算できる）と自然に期待された。（実際、1 次元ユークリッド空間から 4 次元以上のユークリッド空間への埋め込みの空間の有理ホモロジーはそのようになっていることが知られている。）

筆者は、多様体の分類がそうであったように、ファイバーバンドルの分類においても、ハンドル分解において現れる情報こそが非安定領域におけるファイバーバンドルを構成する重要な部分であると考えた。仮にそうだとして、多様体の分類と同じように首尾よくいったとすれば、最も本質的な情報は、ハンドル分解の中間次元における、ハンドルのくっつき方に対応する、球面のユークリッド空間への埋め込み（ユークリッド空間から別のユークリッド空間への埋め込みとそれほど大きな差はない）の２パラメータ族であると期待されるので、埋め込みの空間のホモトピー型に対する期待と合わせて、ファイバーバンドルの分類問題の完全解決への期待がいっそう高まった。そこで筆者は、分類問題の完全解決のために、非安定領域をさらに詳しく調べたいと考えた。

２．研究の目的

２次元球面上の球面バンドルに対して族のモース理論を考え、球面バンドルを自明にするための障害となる情報の全てを具体的に記述し、その間の関係を理解することが主な目的であった。モース関数の臨界点間の勾配軌道が定めるストラティフィケーションと、そのストラティフィケーションに現れない「高次の」情報を詳しく調べることが重要と考えた。

３．研究の方法

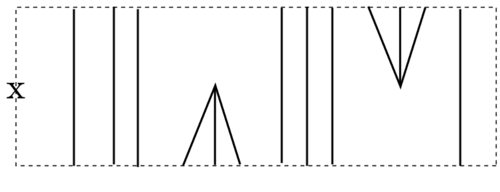
筆者が目指したことは、スメールによるｈコボルディズム定理（5 次元以上の単連結可微分多様体の間のｈコボルディズムは自明なコボルディズムである）の証明を、2 次元球面上のファイバーバンドルに当てはめることであった。もちろんそのためには多くの障害があった。

H コボルディズム定理で本質的なことは、

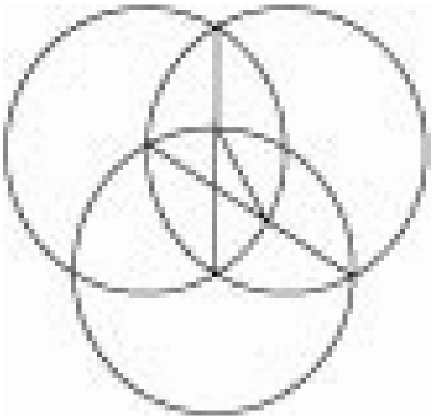
(1)モース関数の臨界点の上げ下げをして指数の順に下から並んでいるようにすること、

(2)モース関数から決まるハンドル分解を変形して、「自明」にすること、

であった。モース関数の 2 パラメータ族においては、一般には(1)が可能でなく、その障害は指数 i の臨界点から指数 i+1 の臨界点へ流れる下向き勾配軌道の存在である。この障害の代数的構造を具体的に記述するために、臨界点間の下向き勾配軌道が定めるストラティフィケーションの形状と、そのストラティフィケーションに現れない高次の情報を詳しく調べた。その結果、(1)のための障害は、そのストラティフィケーションを与える平面図式(例：下図）だけで完全に与えられることが分かり、高次の情報は障害にならないことがわかった。



(2)のためにはファイバーバンドルのハンドル分解が必要であるが、ファイバーごとにハンドル分解となるような、自然な意味でのハンドル分解は、一般には不可能である。実際、指数 i の臨界点から指数 i の臨界点へ流れる下向き勾配軌道の存在がファイバーバンドルのハンドル分解のための障害となる。この障害は、井草潔氏による picture 理論（代数的 K 理論）とほぼ（ファイバーの次元が 7 次元以上では完全に）一致することがわかった。
Picture の例：



最後に、以上の障害が全て消えて、ハンドル分解が得られたとして、さらにそれを自明にするための障害を調べた。ここにおいて、中間次元以外の、低次あるいは高次のハンドルの付き方を「自明」にするために、カービー計算の主定理（同一の有向閉３次元多様体を表す絡み目同士は、「カービー変形」によって移りあう）の証明において用いられると同様の手法を用いた。また同時に、既に知られていた、多様体の埋め込みの空間の連結度に関する結果（グッドウィリー・クライン・ワイス、バドニー、ヘフリガー等）を本質的に用いた。

４．研究成果

３の方法に基づき、h コボルディズム定理の証明の、２次元球面上の奇数次元球面バンドルに対する類似が可能となるための「代数的障害類」の全てを具体的に与え、ファイバーの次元が７次元以上の奇数の場合には、代数的障害類が消えていれば、そのファイバーバンドルが自明であることを示した。また、ファイバーの次元が５次元の場合には、代数的障害類が消えていれば、そのファイバーバンドルはある離散アーベル群の元と、複数の２次元球面の５次元ユークリッド空間への枠付き埋め込みの２パラメータ族で具体的に表示できることを示した。これによって、ファイバーバンドルの分類が、代数の問題と埋め込みの族の分類問題に帰着された。

この結果は２次元球面上のファイバーバンドルを対象にしたものであるが、本研究で展開された議論は、一般次元の球面上のファイバーバンドルへ一般化することも期待でき、それは今後の課題である。

この研究成果について、筆者は、2010 年２月に東京大学の mini-workshop 及び、2010 年６月に大阪大学の研究集会で招待講演をし、2010 年９月に名古屋大学の学会で発表した。また、2010 年７月の信州大学での非公式のセミナーにおいて、筆者の研究成果についてセミナー参加者と長時間議論できたことは大変有益であった。この研究成果を論文にまとめた。

また、埋め込みの空間のホモトピー型について、信州大学の境圭一氏と、信州大学における非公式のセミナーおよび北海道大学における非公式のセミナーにおいて何度も議論した。その結果、今後目指すべき方向が定まり、大変有益であった。

筆者が得た代数的障害類を与える情報の間の関係は、現在も研究中であるが、まだ十分にはわかっておらず、それも今後の課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

①K.Sakai, T.Watanabe, 1-loop graphs and configuration space integralfor embedding spaces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (2011, to appear), 査読有

②T.Watanabe, On Kontsevich's characteristic classes for higher dimensional sphere bundles. II. Higher classes, 査読有, Journal of Topology 2 (2009) 624-660.

③T.Watanabe, On Kontsevich's characteristic classes for higher dimensional sphere bundles. I. The simplest class, 査読有, Mathematische Zeitschrift 262 (2009) 683-712.

〔学会発表〕（計７件）

①渡邉忠之, S^2 上の可微分な D^5-bundle の表示について, 日本数学会秋季総合分科会, ２０１０年９月２３日, 名古屋大学

②渡邉忠之, Sphere bundles, pictures and families of embeddings, 信州トポロジーセミナー, ２０１０年７月１５日, 信州大学理学部

③T. Watanabe, Sphere bundles, pictures and families of embeddings, Lefschetz fibration and category theory, ２０１０年６月１０日, 大阪大学数学教室

④渡邉忠之, Sphere bundles, pictures and families of embeddings, 北海道大学特異点論セミナー, ２０１０年５月１４日,北海道大学数学教室

⑤ T. Watanabe, Sphere bundles, pictures and families of embeddings, mini-workshop on the topology of the space of knots, ２０１０年２月１７日, 東京大学数理科学研究科

⑥渡邉忠之, Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds, 北海道大学幾何学コロキウム, 2009年12月22日, 北海道大学数学教室

⑦渡邉忠之, グラフホモロジーと特性類, 北海道大学談話会, ２００９年５月７日, 北海道大学数学教室

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tadayuki/publications.php

６．研究組織
(1)研究代表者
渡邉 忠之(WATANABE TADAYUKI)
北海道大学・大学院理学研究院・助教
研究者番号：70467447

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし