

機関番号：16101

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009～2010

課題番号：21840036

研究課題名（和文） マース空間に属する保型形式の算術的研究

研究課題名（英文） Arithmetic study of modular forms belonging to the Maass space

研究代表者

水野 義紀 (YOSHINORI MIZUNO)

徳島大学・大学院ソシオテクノサイエンス研究部・准教授

研究者番号：30546388

研究成果の概要（和文）：

3次元双曲空間におけるカトック・サルナック対応について、未確定であった比例定数を確定した。ヘッケの収束因子を用いて低い重さのp進エルミート・アイゼンシュタイン級数を調べた。n次元双曲空間のCM点にわたるアイゼンシュタイン級数の平均値を、二次合同式の解の個数を係数を持つディリクレ級数で表示した。次数2重さ2の非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数の不定値フーリエ係数に付随するケッヒャー・マース級数に対し、その適切な定義を与え、解析接続と関数等式を示した。

研究成果の概要（英文）：

We determined a proportional constant which appears in three dimensional analogue of the Katok-Sarnak type formula.

We studied p-adic Hermitian-Eisenstein series of low weight by using Hecke's convergent factor.

We expressed average values of Eisenstein series over CM points on n-dimensional hyperbolic space in terms of a Dirichlet series whose coefficients are the number of the solutions of quadratic congruences.

We gave a good definition of Koecher-Maass series for indefinite Fourier coefficients of real analytic Siegel-Eisenstein series of degree 2 and weight 2. We then proved a meromorphic continuation and a functional equation of the Koecher-Maass series.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	790,000	237,000	1,027,000
2010年度	680,000	204,000	884,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,470,000	441,000	1,911,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：

- (1) アイゼンシュタイン級数 (2) ケッヒャー・マース級数 (3) カトック・サルナック対応
(4) フーリエ係数 (5) 類数 (6) マース空間 (7) モジュラー形式

1. 研究開始当初の背景

ジーゲル・アイゼンシュタイン級数は保型形式の算術的研究の基本であるので、多くの場合にフーリエ係数を具体的に求めたい。最近になって報告者が Γ_0 型レベル付ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に対し、そのフーリエ係数の公式を得た。得られた公式の算術的特性の研究や p 進ジーゲル・アイゼンシュタイン級数をレベル p のジーゲル・アイゼンシュタイン級数で書き表すとといった p 進理論への応用などがはじまったばかりであった。フーリエ係数決定の手法自身も、今井によるジーゲル保型形式の逆定理に示唆を受けた双曲空間における調和解析を用いるという解析的で興味あるものであり、手法を深めること、適用範囲を広げることは興味深いことである。

正則ジーゲル保型形式に付随するディリクレ級数であるケッヒャー・マース級数の解析的性質は良く知られていた。一方、非正則ジーゲル保型形式に付随するケッヒャー・マース級数の解析的性質は、あまり知られていない。非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数の研究は、非正則ジーゲル保型形式の場合の原型として非常に興味深い。これは次数が3以上のときの荒川の研究に始まるものである。報告者は伊吹山・斎藤、伊吹山・桂田の研究に示唆を受け、2次の場合の不定値フーリエ係数に付随するケッヒャー・マース級数を除いて、その解析接続や関数等式といった解析的性質を調べることに成功していた。特に荒川の仕事では除外されていた2次正定値フーリエ係数の場合を解決していた。そして、残された2次不定値フーリエ係数の場合の解決が望まれていた。2次不定値フーリエ係数の場合には、付随するケッヒャー・マース級数に対する適切な定義すら知られていない状況であった。

2. 研究の目的

第一の課題として、 Γ_0 型レベル付ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の公式と算術的特性の研究、それを用いた p 進ジーゲル・アイゼンシュタイン級数の記述といった p 進理論への応用を $0(2, n+1)$ 上の保型形式に拡張することを目的とする。 $n=2$ ならジーゲル保型形式、 $n=3$ ならエルミート保型形式の場合である。フーリエ係数決定の手法を深めること、適用範囲を広げることを行い、必要となるカトック・サルナック型実解析的志村対応を考察する。

第二の課題として、非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数の2次不定値フーリエ係数に付随するケッヒャー・マース級数の適切な定義を与えること、全複素平面への解析接続および関数等式といった解析的性質を探究することを目的とする。言い換えると、良い解析的性質を持つように正しく定義することを目的としている。合流型超幾何関数など、保型形式論に現れる関連する特殊関数について、理解と認識を深めることを行う。

3. 研究の方法

第一の課題については、報告者による Γ_0 型レベル付ジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数決定の手法、その算術的特性の研究や p 進理論への応用を参考に、 $0(2, n+1)$ 上の保型形式に拡張していくために必要な事実を研究、習得していく。実例をとおして、着実に知見を蓄えていく。

第二の課題については、ベヘラー・伊吹山・桂田に始まる非正則ジーゲル・アイゼンシュタイン級数に付随するケッヒャー・マース級数の明示公式を用いる。伊吹山・斎藤による新谷ゼータの取り扱いに倣えば、2次不定値フーリエ係数に付随するケッヒャー・マース級数の主要部分は、ある2変数ゼータ関数の一方の変数についての極におけるローラン展開の定数項として得られるはずである。まず2変数ゼータ関数の解析的性質を伊吹山・斎藤・コーエン・アイゼンシュタイン級数とザギエのランキン・セルバーグ法を用いて導き出す。続いて明示公式を併せることにより、2次不定値フーリエ係数に付随するケッヒャー・マース級数の解析的性質を導き出す。もっとも困難な部分はガンマ因子の取り扱いであると予期されるが正定値フーリエ係数の場合に成功した報告者の方法を、残された不定値フーリエ係数の場合に適用する。

4. 研究成果

第一の課題については以下のような成果があった。

3次元双曲空間の場合のカトック・サルナック型実解析的志村対応について、未確定であった比例定数を確定した。この対応を用いたエルミート保型形式版斎藤・黒川リフトの解析的証明、レベル付エルミート・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数決定の論文の最終原稿を作成した。以上の研究は2本の論文にまとめられた。ひとつは"Regularized theta lift and formulas of Katok-Sarnak type"と題して Forum Mathematicum 誌に掲

載予定である。残りは”Spectral theory on 3-dimensional hyperbolic space and Hermitian modular forms”と題して投稿し、現在査読中である。またこれらの成果を第4回福岡数論研究集会で口頭発表した。以上は Roland Matthes 氏 (カッセル大学) との共同研究である。

この結果を用いて p 進保型形式を研究した。以前、2種類の p 進エルミート・アイゼンシュタイン級数は実際にエルミート保型形式になり、一つは特にレベル p のエルミート・アイゼンシュタイン級数を用いて記述していた。まず、ヘッケの収束因子を用いることで重さの仮定を緩めた。また、 p 進ジークル・カスプ形式が実際にジークル・カスプ形式になるかという問題を考察した。

以上を ”On p -adic Hermitian-Eisenstein series and p -adic Siegel cusp forms” と題する論文にまとめ、学術誌に投稿した。以上は菊田俊幸氏 (大阪工業大学) との共同研究である。

上に述べたアイゼンシュタイン級数の p 進理論に関連して、 p 進ジークル・アイゼンシュタイン級数の保型性とそれにまつわる2つの合同式であるセール型、メイザー型合同についての論文がハンプルグ大学紀要に掲載された。以上は長岡昇勇氏 (近畿大学) との共同研究である。

n 次元双曲空間の場合のカトック・サルナック型実解析的志村対応については、次のような進展があった。 n 次元双曲空間の CM 点にわたるアイゼンシュタイン級数の平均値を、二次合同式の解の個数を係数に持つディリクレ級数で表すことができた。2次元におけるデューク・イマモーグルの結果、先に述べた3次元における報告者・Matthes の結果、概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いたモジュラー形式構成についての上野の結果などをふまえると、これら平均値は適当なレベルの非正則モジュラー形式のフーリエ係数であると期待できる。

第二の課題については以下のような成果があった。

次数2重さ2の場合に限って、非正則ジークル・アイゼンシュタイン級数の不定値フーリエ係数に付随するケッヒャー・マース級数の適切な定義を与えることに成功し、さらに解析接続と関数等式を得ることができた。ミュラーによる特殊関数の取り扱いを知ったのがきっかけとなった。重さ2という条件もミュラーの方法に由来するものである。これにより、一般重さの場合の解決の第一歩が踏み出せた。この級数を明示的に書き下せば、

不定値二元二次形式の類数の2乗を係数に含むディリクレ級数であり、算術的応用が見込まれる。この結果を RIMS 研究集会で発表した。論文原稿も ”Dirichlet series associated with square of the class numbers” と題して作成および投稿し、現在査読報告に従って改訂中である。メリン変換およびランキン・セルバーグ合成積のガンマ因子の取り扱いにおいて、ミュラーの方法を深めていくことは興味ある課題である。

一方で、以前、桂田英典氏と行なった、ディリクレ指標で捻ったケッヒャー・マース級数の明示公式とその半整数重さ保型形式のランキン・セルバーグ合成積の特殊値への応用についての論文 ”Linear dependence of certain L-values of half-integral weight modular forms” が Journal of the London Mathematical Society 誌に受理された。さらなる発展が期待されると思われる。以上は桂田英典氏 (室蘭工業大学) との共同研究である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5件)

- ① Yoshinori Mizuno, Shoyu Nagaoka
Some congruences for Saito-Kurokawa lifts,
Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg,
80巻, 2010, 9-23 (査読有り)
- ② Yoshinori Mizuno,
Spectral theory on 3-dimensional hyperbolic space and Hermitian modular forms (a joint work with R. Matthes),
第4回福岡数論研究集会報告集, 41巻, 2010, 23-33 (査読なし)
- ③ Hidenori Katsurada, Yoshinori Mizuno,
An explicit formula for the twisted Koecher-Maass series of the Saito-Kurokawa lift and their applications,
京都大学数理解析研究所講究録, No. 1659,
2009, 47-58 (査読なし)
- ④ Yoshinori Mizuno,
Koecher-Maass series for positive definite Fourier coefficients of real analytic Siegel-Eisenstein series of degree 2, Bulletin of the London Math. Soc, 41巻, 2009, 1017-1028 (査読有り)

- ⑤Yoshinori Mizuno,
An explicit arithmetic formula for the
Fourier coefficients of
Siegel-Eisenstein series of degree two
and square-free odd levels,
Mathematische Zeitschrift, 263巻,
2009, 837-860 (査読有り)

[学会発表] (計 2件)

- ①水野義紀,
Dirichlet series associated with square
of the class numbers, 京都大学数理解析
研究所研究集会「保型形式と関連する跡公
式, ゼータ関数の研究」2011年1月20日,
京都大学数理解析研究所
- ②水野義紀,
3次元上半空間のスペクトル理論とエル
ミート保型形式, 第4回福岡数論研究集会,
2009年8月25日, 九州大学

[その他]
ホームページ等

<http://pub2.db.tokushima-u.ac.jp/ERD/person/186508/profile-ja.html>

6. 研究組織

- (1) 研究代表者
水野 義紀 (YOSHINORI MIZUNO)
徳島大学・大学院ソシオテクノサイエン
ス研究部・准教授
研究者番号：30546388
- (2) 研究分担者 なし
研究者番号：
- (3) 連携研究者 なし
研究者番号：