様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　23 年　5 月 25 日現在

機関番号：３２６６３
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2009～2010
課題番号：２１８４００４６
研究課題名（和文）　4 区間交換変換の力学的性質について

研究課題名（英文）　Dynamical properties of 4-interval exchange transformations

研究代表者
　石村　光資郎（ISHIMURA KOSHIRO）
　東洋大学・総合情報学部・講師
　研究者番号：５０５５３８３０

研究成果の概要（和文）：私は Negative Slope アルゴリズムに対して Negative Slope アルゴリズムによる展開列が無限に続くような初期条件に対して、帰納極限群を具体的に表し次元群を具体的に構成することに成功しました。またその証明の中で、展開列が無限に続くような初期条件を与える無理数の近似分数を Negative Slope アルゴリズムの表現行列の成分で表すことに成功しました。このことは、単純連分数展開に続く無理数の新しい近似分数を与えるものであると考えます。

研究成果の概要（英文）：For the initial condition that the negative slope algorithm does not stop, we show the inductive limit group explicitly and succeed to construct the dimension group of rank three. In the proof, we succeed to show the approximation fractions of the irrational number that iteration does not stop by the negative slope algorithm. This fact implies that we show new approximation fraction of irrational numbers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	930,000	279,000	1,209,000
２０１０年度	520,000	156,000	676,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,450,000	435,000	1,885,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：解析学、代数学、確率論

１．研究開始当初の背景

区間交換変換（interval exchange transformations 以下、IET）とは、Oseledets（1966）によって導入された以下の変換のことを言う。

$X=[0,1)$ とする。与えられた確率ベクトル $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ に対して $\beta_0=0,\ \beta_1=\sum\alpha_j,\ X_i=[\beta_{j-1},\beta_j)$ とおく。すると、$X=\sum_{j=1}^{n}X_j$ となることがわかる。また τ を整数 $1,\cdots,n$ に対する置換とし、$\alpha^{\tau}=(\alpha_{\tau(1)-1},\cdots,\alpha_{\tau(1)-1})$ と表すことにする。同様にして β_j^{τ} 及び X_j^{τ} を定義する。このとき、写像 $I:X\to X$ を次の様に定義する。

$1\le i\le n$ に対して $I(x)=x-\beta_{i-1}+\beta^{\tau}_{\tau(1)-1}$

$x \in X_i$ とする。この写像 I を n-IET と呼ぶことにする。この写像について Keane（1975）は以下のことを証明した。

(1)I は minimal である、つまり全ての軌道が単位区間内で稠密であることと区間の有限ではない和集合が I について不変である。

(2) I の不連続点の軌道が無限かつ全て異なるならば、I は minimal である。（この条件は infinite distinct condition、以下 i.d.o.c. と呼ばれている）

(3) 置換τが可約ではなくかつ確率ベクトルαが有理独立ならば、上記（2）の条件が満たされて I は minimal である。（この条件は irrationality condition と呼ばれる。）

IET は数論との関連が深いことが分かっている。2-IET は単位演習場の回転と同一視することができるし、n≧3 の場合には多角形上のビリヤード運動と同一視することが出来る。Keynes と Newton（1976）は non-uniquely ergodic な 5-IET の例を具体的に作ることに成功した。これをうけて Keane（1977）は、non-uniquely erugodic な 4-IET の具体例を作ることに成功し、Keane conjecture と呼ばれる次の予想を発表した。それは、‘‘ほとんど全ての IET は uniquely ergodic である”というものである。この予想に対して、Veech（1982）と Masure（1982）はそれぞれ独立に異なった証明を与え、この予想は正しいことが証明された。彼らの証明の中で、IET の性質を知るには、その Rauzy induction の性質を調べればよいということがわかっており、それ以後の IET の研究においてはその手法がよく用いられることとなった。

ところで、ほとんど全ての IET は uniquely ergodic であることは証明されたが、どんな条件の時に non-uniquely ergodic となるかについては未解決のままである。これまでの研究においては、4-IET の Rauzy induction を考えると、それは２つの独立した component を持つことが分かっているのみである。

また Effros と Shen（1978）は単純連分数展開を用いたランク２の次元群の具体的な構成に成功している。これまで次元群については、具体例を構成した結果がほとんどなく、どのようなものが次元群となるのかを示す重要な結果である。

２．研究の目的

区間交換変換（IET）は、n=2,3 の場合はこれまでの研究によってその性質がほとんど解明されている。しかし、n≧4 に対する一般の n 区間については、Veech（1982）と Masure（1982）の結果以外に、判明していることはほとんどない。そこで、まずは 4-IET についてのエルゴード的性質や数論との関連について研究を行う必要があると考えた。特に 4-IET の induced transformation の純周期軌道をみつけることができれば、これまで知られていないような無理数との関連性について重要な結果が得られる可能性がある。

次元群についてはランク２の具体例しかえられていないが私のこれまでの研究対象である Negative slope algorithm に対して次元群の構成を試みれば、これまで知られていなかったランク３の次元群の構成が可能であることが期待され、4-IET の induced transformation のエルゴード的性質や純周期軌道についての性質が判明すれば、どうようにランク４の次元群の構成が可能であることが期待される。

３．研究の方法

4-IET から得られる first return map を構成し、それによって得られる Rauzy diagram を明らかにする。つまり、ある 4-IET の first return map はその 4 区間の長さの比によって、別な 4-IET に移ることもあるので、どのような長さのときに、どのような 4-IET に移るのかを調べる。その後に、4-IET の induced transformation を決定する。Induced transformation が決定されたら、そのエルゴード的性質や数論的性質について調べる。

また、Effos と Shen[ES]が単純運分数に対して帰納極限群を定義し、次元群を特定した方法にならって、Negative slope algorithm に対しても帰納極限群を定義し、次元群を構成する。

平成 21 年度

2-IET や 3-IET における研究手段を踏まえて、同様の手順を追うことにより、研究の進展をねらう。始めに induced transformations を確立するところから着手する。

まず始めに Rauzy[R]の導入した Rauzy induction の構成を行うことを考える。Rauzy induction の構成とは、IET の定義域の中にもう１つ同じ構造を持つ first return map をみつけることである。このときに、区間の長さは短くなることが分かっているので、Rauzy induction を構成する前と後の区間の長さを結びつける正方行列を導き出す。

この行列は 2-IET や 3-IET の場合においては、Pisot 条件、つまり行列の固有値が次の条件を満たすことが知られている。

Pisot 条件：n 次正方行列の固有値 $\lambda_i, 1 \le i \le n$ に対して、$\lambda_1 > 1 > |\lambda_i| > 0$ を満たす。そして、最大固有値 λ_1 を Pisot 数と呼ぶ。

伊藤俊次ら[AI]の研究結果より、Pisot 条件を満たす行列に対して、それを incidence matrix に持つような substitution が与えられる。この substitution は 2-IET や 3-IET の場合には不動点を持つことが知られており、この不動点の存在が重要であることがわかっている。したがって 4-IET の場合も不動点が存在するかどうか調べることが重要である。n-IET に対する substitution は一般に n 文字の substitution であるので、4-IET の場合には、substitution は 4 文字となり、各文字について何度か substitution を施し、その点列を調べることによって、不動点が存在するかどうかただちに判断することが出来る。

一般に n 文字からなる subsutitution から得られた不動点(点列)は、当然 n 文字から構成されているので、各文字をそれぞれ基底を表しているとみなせば、１つの点列に対して n 次元上の１つの点が対応することがわかる。substitution により不動点を生成する最も短い文字列から開始して、substitution を繰り返し施すことによって得られる n 次元上の点の集合を Y とすれば、その集合の点は substitution から得られる incidence matrix の固有値が Pisot 数に対応する固有値の固有ベクトル方向に伸びていることがわかっているので、4-IET についても同様のことが成り立つかどうかを調べる。

これらの事実について証明する際には数式処理ソフトの活用が有効である。4 次の正方行列の問題であるので、Mathematica 等の数式処理ソフトを効果的に用いることにより、おおよその見当をつけながら証明する。さらに集合 Y の要素に対して、各要素を最大固有値の固有ベクトル方向に沿って、原点を通り、固有ベクトル方向に垂直な面に射影する。このとき、各要素の最後の文字によって、その行き先の領域が決まっており、それらは互いに協会を接しながら disjoint であることを証明する。その際、4-IET に対してはその領域が線分となっており、各 4 つの線分の長さの比はちょうどもとの 4-IET の区間の長さの比に一致していることを確かめる。このときも、Mathematica 等を用いることで、実際に図やグラフを描かせることができるので、目で確かめながら証明を進められることが期待される。このことが確認された後に、first return map をどこに取るかによってその固有値が変化することが予想されるので、どのような固有値をもつか調べることにより、適切な first return map の取り方を知ることが出来る。

どのような固有値を持つか調べる際には、簡単なプログラムを作成し、初期条件を入力するだけで固有値と固有ベクトルが求められるようにしておけば、固有値の大まかな見通しを立てることが出来る。この固有値は今後、induced transformation が関係する数論的アルゴリズムと密接な結びつきを持つと予想されるので、どのような代数的性質をもつ数が現れるかが重要になってくる。

first return map の取り方から区間の長さの変換法則を導きだすことができるので、その法則より induced transformation を確立することができる。induced transformation を構成したら、先に求めてある固有値を代入し、induced transformation による軌跡を調べることによって、induced transformation の完成度を調べることが出来る。

平成 22 年度

induced transformation の構成ができれば、連分数アルゴリズムや Ferenczi ら[FHZ1]が定義した Negative slope algorithm と同様に、これまでの研究で判明しているエルゴード的性質について調べることが可能となる。Veech[V]と Masur[M]の結果から IET の性質を調べるためには、その induced transformations の性質がわかればよいので、もとの 4-IET の性質についても調べることが出来る。

また、報告者らの結果[IN]から、induced transformation が生成する countable partition の定義の仕方に注目する。確立された induced transformation を M とする。このとき M によって、定義域上の異なる点は異なる軌道を持ち、M の定義域上のほとんど全ての点は異なる軌道を持つことを示すことが重要である。このとき例外的に必ずしも異なる点が異なる軌道を持つとは限らない状況が生まれてくる可能性がある。しかしながら、Ferenczi ら[FHZ1.FHZ2,FHZ3]や由利[Y]の結果により、その様な点の集合はその測度が０であれば、エルゴード的性質を満たす可能性がある。

上記のことを示すことが出来れば、この countable partition がマルコフ分割となっていることが示されるので induced transformation が ergodic であることを示すのはそれほど困難なことではないと予想される。この時、北海道大学の由利美智子氏や慶應義塾大学の仲田均氏に協力を求めることにより、問題解決の糸口がみえるものと期待される。

さらには induced transformation そのものが数論的アルゴリズムになっていることから、そのアルゴリズムの周期点となる条件がどのようなものであるかを明らかにすることが重要である。2-IET と 3-IET の場合の結果[AI,II]を踏まえ、induced transformation の定義域内の点が M によってどのような軌跡を描くか調べる。その際に、

自然拡大の手法を用いることによって周期軌道を比較的容易に見つけられることが期待される。また、その周期軌道を与える条件はこれまでの結果[AI,II]より、最大固有値によって特徴づけられることが予想される。

エルゴード的性質の他に Effros と Shen の結果[ES]より、ランク３の次元群の構成を試みることができる。Effros と Shen によると、単純連分数の場合においてランク２の次元群の構成に成功している。そこでの構成方法を見ると、単純連分数アルゴリズムに対して、その表現行列である 2 次の正方行列に対して帰納極限群を定義し、その収束先がある群構造を持つことを示すことによって、次元群の構成を行っている。

報告者の研究対象である Negative slope algorithm に対する表現行列の性質と単純連分数アルゴリズムの表現行列の性質は、比較的似ており、Negative slope algorithm の表現行列の性質は、単純連分数アルゴリズムの表現行列の性質を拡張したものになっているため、Effros と Shen がランク２の次元群の構成で用いた手法をそのまま活かすことによってランク 3 の次元群の構成を行うことができることが期待される。

参考文献

[AI] P.Arnoux and S.Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. 8 (2001), 181-207.

[ES] E.G.Effros and C-L.Shen, *AF C.-algebras and Continued Fractions*, Indiana Univ. Math. J. (1980) Vol. 29, pp. 191-204.

[FHZ-1] S.Ferenczi, C.Holton, L.Zamboni, *The structure of three-interval exchange transformations I, an arithmetic study*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), 861-901.

[FHZ-2] S.Ferenczi, C.Holton, L.Zamboni, *The structure of three-interval exchange transformations II, a combinatorial description of the trajectories*, J. Anal. Math. 89 (2003), 239-276.

[FHZ-3] S.Ferenczi, C.Holton, L.Zamboni, *The structure of three-interval exchange transformations III, ergodic and spectral properties*, J. Ann. Math. 93 (2004), 103-138.

[M] H.Masur, *Interval exchange transformations and measured foliations*, Ann. Math. 115 (1982), 169-200.

[O] V. I. Oseledets, *On the spectrum of ergodic automorphisms,* Sov. Math. Dokl, 7, (1966), 776-779.

[R] G.Rauzy, E*changes d'intervalles et transfomations induites*, Acta. Arith. 34 (1979),315-328..

[Y] M.Yuri, *On a Bernoulli property for multi-dimensional mappings with finite range structure*, Tokyo J. Math. 9 (1986), 457-485.

[V] W.Veech, *Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps*, Ann. Math. 115 (1982), 201-242.

４．研究成果

報告者は 4 区間交換変換について、先行研究からも知られているように Rauzy induction を繰り返しほどこすと、あるダイアグラムが完成することを確かめた。このダイアグラムは 2 つの独立したコンポーネントからなり、一方は 4 文字の既約な置換で構成されており、他方は、4 文字の可約な置換から構成されていた。このとき、既約なコンポーネントにおける周期的なパスを１つ選択し、その表現行列が Pisot 条件を満たすようなものを探したが、うまく見つけることはできなかった。その中で、Pisot 条件に一番近い条件を満たす周期的なパスを１つ固定し、表現行列の incidence matrix から substitution を不動点をもつように構成し、できあがった 4 文字からなる substitution に対して不動点となる点列を作り、それによって得られる 4 次元上の点の集合を構成した。その集合の各点を、incidence matrix の最大固有値の固有ベクトル方向に垂直な平面上に射影したところ、ひと続きのジグザグの線分が現れた。さらにこの線分は４つの交わらない線分の和集合となっていることも確かめられた。しかしながら、induced transformation の構成には至らなかった。

Effros と Shen の研究結果から Negative slope algorithm に対して Negative slope algorithm による展開列が無限に続くような初期条件に対して、帰納極限群を具体的に表し次元群を具体的に構成することに成功した。またその証明の中で、展開列が無限に続くような初期条件を与える無理数の近似分数を Negative Slope アルゴリズムの表現行列の成分で表すことに成功した。このことは、単純連分数展開に続く無理数の新しい近似分数を与えるものである。またこれらの内容を論文として発表するためプレプリントとしてまとめた。

報告者は湯浅久利氏ら（文京学院大学非常勤講師）との議論によって、Negative Slope algorithm に対応して構成できた次元群に対応して adic 変換を構成すると、それはもとの 3 区間交換変換の位相的拡大になっていることが予想されることがわかった。そして、その adic 変換に付随する次元群は、報告者が構成した次元群と同型になるだろうという予想を立てることができた。しかしながら、Negative Slope algorithm に対応して構成した次元群に対応する adic 変換の構成については未だ成功していないため、もとの 3 区間交換変換の位相的拡大であることの証明に至ることはできなかった。

報告者は学会活動として、Workshop「数論とエルゴード理論」を伊藤俊次氏の平成 19 年度科学研究費補助金 基盤研究 (B)「準周期タイリングの数理とその応用」（代表者 金沢大学大学院自然科学研究科 伊藤俊次）とともに 2010 年 3 月 6 日及び 7 日に開催した。その中で、報告者は「A constructon of the dimension group of degree 3」というタイトルで講演を行い、これまで先行研究においてはほとんど存在しない、ランク３の次元群の具体例について発表した。また、日本大学文理学部上席研究員田村純一氏、文京学院大学湯浅久利氏および東京大学大学院特任研究員中石健太郎氏を同 Workshop に招聘し、講演をしていただいた。

また、2009 年度東京力学系セミナーおよび 2010 年度東京力学系セミナー「夏季集中セミナー」においても発表した。

さらに、伊藤俊次氏の平成 22 年度科学研究費補助金 基盤研究 (C)「準周期タイリングの構成理論とエルゴード理論」（代表者 金沢大学大学院自然科学研究科 伊藤俊次）とともに Workshop「数論とエルゴード理論」を 2011 年 2 月 18 日及び 19 日に開催した。同 Workshop に東京大学大学院特任研究員中石健太郎氏を招聘し、講演をしていただいた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計 3 件）

① <u>石村光資郎</u>，「The negative slope algorithm and a dimensional group of rank 3」, 2010 年度東京力学系セミナー「夏季集中セミナー」, 2010 年 9 月；東京工業高等専門学校

② <u>石村光資郎</u>，「A construction of the dimension group of degree 3」, Workshop「数論とエルゴード理論」, 2010 年 3 月；金沢大学サテライト・プラザ

③ <u>石村光資郎</u>，「Making a trial to calculating dimension groups coming from NSA and MNSA」，東京力学系セミナー, 2009 年 11 月，東京工業専門高等学校

〔その他〕

<u>Koshiro Ishimura</u>, *The negative slope algorithm and the dimension group of rank 3*, http://arxiv.org/abs/1104.3626

６．研究組織

(1)研究代表者

石村光資郎（ISHIMURA KOSHIRO）
東洋大学・総合情報学部・講師
研究者番号：50553830

(2)研究分担者（0）

(3)連携研究者（0）