様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 5 月 30 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2009～2010
課題番号：２１８４００４７
研究課題名（和文）　燃焼過程に現れる非一様な空間パターンの数理的研究

研究課題名（英文）　Mathematical approach for spatial pattern in combustion

研究代表者
池田　幸太（IKEDA KOTA）
明治大学・研究・知財戦略機構・講師
研究者番号：５０５５３３６９

研究成果の概要（和文）：1. 燃焼過程のモデル方程式である，3 変数の反応拡散方程式系において、2 種類の進行波解を構成した。また、特定のパラメータを用いることで進行波解が高次元空間で安定であること示した．一方，3 変数の反応拡散方程式系を 2 変数に縮約した方程式を導出した．2. 退化した反応拡散方程式におけるスパイクパターンを特徴付ける関数を与える微分方程式を導出した．
研究成果の一部は論文として発行されることが決定した。

研究成果の概要（英文）：1. We construct a traveling wave solution in a reaction-diffusion model with three components for combustion. We prove the stability of the solution in higher dimension. We reduce our system to a reaction-diffusion system with two components. 2. We derive a differential equation which defines a function to characterize a spiky pattern in a degenerate reaction-diffusion equation. Our paper will be published in a journal.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	840,000	252,000	1,092,000
２０１０年度	760,000	228,000	988,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：大域解析学
キーワード：関数方程式論，応用数学

１．研究開始当初の背景

(1) シリンダー領域において重力に抗して進む，ある燃焼面は不安定である．不安定化した燃焼面は凸状に変形し，燃焼の先端部分が領域の境界に向かって進む．Sivashinsky 氏らは，非局所項をもつ反応拡散方程式を用いてこの現象をモデル化した．この方程式においては，あるスパイクパターンが形成され，非常に遅い速度で進む．ここでのスパイクパターンは，ある変換公式によって凸状の空間パターンと対応付けられる．しかしながらこのスパイクパターンは，これまでに知られたスパイクパターンとは大きく異なるメカニズムを含む．スパイクパターンが動いている間，その形状は保たれるものの，ある駆動力によってスパイクのピークの値は時間とともに増大してしまう．これは一様な燃焼面と凸状のパターンにおける速度差が原因である．この駆動力が加わったとき，スパイクパターン

のダイナミクスがどのような影響を受けるか調べる必要がある．このメカニズムによって，スパイクパターンのダイナミクスがどのような影響を受けるか調べる必要がある．

(2) 波状の燃焼面や指状パターンを示すある地上実験に関する報告が，Zik 氏らによって提出された．この実験では，対流の効果を弱めた状態で酸素を供給し，酸素の供給速度を変化させたときの燃焼過程が調べられた．この供給速度を徐々に下げると，一様な燃焼面は不安定になり，波状の燃焼面や指状パターンが現れることが観測されている．対流の効果が小さいためこのような現象が起こると考えられており，微小重力環境下での実験でも同様の空間パターンが観測された．Zik 氏らの行った実験における現象を数理的に理解するため，温度，紙の密度，酸素濃度を未知関数とする反応拡散方程式を提唱した．このモデルに現れる一様な燃焼面が不安定化を引き起こすメカニズムや，波状の燃焼面，指状パターンの定性的な性質を数学解析によって明らかにする必要がある．

上記の学術的背景から，燃焼面の不安定化や，それに伴って出現する空間パターンの定性的な性質やメカニズムを数学解析によって明らかにする．

２．研究の目的

(1) Sivashinsky 氏らが提唱した方程式における，内部スパイクパターンのダイナミクスを明らかにする．形式的には，この方程式にはスパイクパターンを表す定常解が存在する．そこで，この形式解の近傍に初期関数を取り，境界からある程度離れている限りスパイクパターンの形状が保たれることを示す．さらに，スパイクパターンが境界に向かって進むことも示す．内部スパイクパターンに関する解析が終了した後，境界スパイクパターンのダイナミクスを考え，境界の曲率がスパイクパターンのダイナミクスに与える影響を調べる．これらの研究によって，スパイクパターンのダイナミクス全体を明らかにする．

(2) 燃焼過程に関する反応拡散方程式系において，一様な燃焼面が不安定になるパラメータを求める．実は燃焼面の不安定化が起こるとき，メゾスケールと呼ばれる特有のスケーリングが現れ，さらに波状の燃焼面がメゾスケールとは異なるスケールを持つ可能性がある．これはこれまで知られていた 2 変数系の反応拡散方程式における結果と大きく異なるため重要である．現時点ではどのスケーリングによって波状の燃焼面が決定されるかは未知で，厳密な数学解析が必要である．さらに，形式的には波状の燃焼面と指状パターンは同じスケールに支配されることが分かっているので，波状の燃焼面に対する解析が終了後，指状パターンを持つ進行波解を構成する．

３．研究の方法

(1) Sivashinsky 氏らが提唱した方程式における内部スパイクパターンの解析では，反応項がリプシッツ条件を満たさない点を克服せねばならない．非線形項がリプシッツ条件を満たさないので，摂動展開などの手法が使えない可能性がある．そこで，適切な比較関数を構成し，精密な評価を求めることで内部スパイクパターンを制御する．また，内部スパイクパターンを表す適当な関数を構成するために形式的な定常解を用いるが，この定常解は境界条件を満たさない．そこで，ベッセル関数等を用いて近似解を補正し，境界条件を満たすようにしなければならない．しかしながら，反応項がリプシッツ条件を満たさない困難さを克服するためには適切な近似解を構成する必要がある．これらの困難さを克服し，スパイクパターンを時間大域的に制御する．

(2) 燃焼過程に関する反応拡散方程式系においては，進行波解が存在することを証明済みであるため，進行波解の安定性に焦点を絞る．本研究ではルイス数と呼ばれる温度と酸素の拡散係数の比をパラメータにとり，十分小さいと仮定する．数値シミュレーションでは，ルイス数が十分小さい場合に限り，燃焼面の不安定化や指状パターンが再現されるため，このような仮定をしても不自然ではない．そして，このような仮定の下では特異摂動法を適用することができるため，構成的に解析を行うことが可能である．線型化固有値問題を解析するため，エバンス関数や，SLEP 法を用いる．固有値の位置を解析する場合，これらの数学的な手法が有効である．さらに燃焼面が不安定化を起こすときの最大不安定固有値を求め，メゾスケールを持つ空間パターンが生じるかどうか調べる．同様に，拡散項付き 2 変数系の興奮系における進行波解の解析も行う．また，数値シミュレーションを数学解析に援用する．スケール決定後，厳密に波状燃焼面や指状パターンを表す関数を得る．

４．研究成果

(1) 前述の通り，Sivashinsky 氏らが提唱した方程式における内部スパイクパターンのダイナミクスを明らかにするためには，スパイクパターンを特徴付ける解を構成せねばならない．スパイクパターンを表す形式解は既に得られているが，境界条件を満たさない．したがって，補正のために外部解を構成せねばならない．拡散係数が小さ

い状況を考えているため，形式的に外部解を構成しようとすると，定数解しか得られない．したがって，単純に摂動展開を行うべきではなく,特殊な非線形変換が必要であった．この非線形変換を行った後に摂動展開を実行した結果，1 階の偏微分方程式が得られた．これは粘性解理論に現れる形の方程式であるが，既存の理論を用いて解を構成することが難しい．現在この方程式の解析を行っている．

(2) 燃焼過程に関するモデル方程式は，そもそも 3 変数系の反応拡散方程式である．そのため，解析を行うことが困難であり，2 変数系に縮約する必要がある．既存の結果や，以前に行った研究結果から，パルス型進行波解の安定性を決めているのは，本質的には 2 つある遷移層のうち 1 つであると考えられる．これは大きな仮定であるが，仮にこれを認めると，3 つの変数のうち 1 つを定数と置き換えることができる．この方法によってまずは方程式を 2 変数系に縮約した．

進行波解の存在を証明することには成功したので，次に安定性解析を行った．
縮約した結果得られた式においては，2 変数とも拡散項を伴う．実は，拡散項付きの進行波解の安定性解析は非常に難しく，解析が進んでいない．そこで，研究の第 1 歩として FitzHugh-Nagumo 方程式を用いて，パルス型進行波解の安定性解析を行った．この方程式はパルス型進行波解が現れる典型的な方程式であり，広く研究されている．1 変数だけに拡散項が含まれる場合，同方程式には進行波解が安定的に存在することが知られているが，実はもう 1 つの変数が拡散項を持った場合，不安定である可能性が得られた．特に，拡散係数がある程度小さい時に不安定になってしまう．真に拡散係数が 0 である場合には安定で，少しでも 0 から離れた場合に不安定になってしまうため，興味深い結果が得られた.他の方程式系においても同様の結果が得られることを期待しており，現在解析を進めている．

ところで，方程式を空間 1 次元で考えると，適当なパラメータに対して進行波解の反射が観測される．まずは進行波解が酸素の供給される方向に向かって進み，境界に達する．その後進行波解は大変形を引き起こし，逆向きに進み始める．現象的には「再燃」に相当すると考えられ，研究対象としては重要であると言える．この現象を明らかにするために，2 種類の進行波解を構成せねばならない．前者の進行波解は既に構成済みであった．その後研究を行った結果，逆向きの進行波解の構成に成功した．これによって，反射に必要な進行波解の存在が証明できた．この後さらに解析を進め，反射現象全体を捉えたい．

なお，進行波解の存在と安定に関する結果を論文にまとめ，論文誌において受理された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

①Kota Ikeda, Masayasu Mimura, Travelling wave of a 3-component reaction-diffusion model in smoldering combustion, Communications on Pure and Applied Analysis, 査読有, 2011 年 2 月 7 日掲載決定, pp.1-32

②Shin-Ichiro Ei, Kota Ikeda, Yasuhito Miyamoto, DYNAMICS OF A BOUNDARY SPIKE FOR THE SHADOW GIERER-MEINHARDT SYSTEM Communications on Pure and Applied Analysis, 査読有, 2010 年 11 月 22 日掲載決定, pp.1-31

〔学会発表〕（計 14 件）

① 池田 幸太，縮約方程式が現れる反応拡散系に関する解析，京都駅前セミナー，2010 年 11 月 12 日，キャンパスプラザ京都，京都市，京都，

② 池田 幸太，栄 伸一郎，柳田 英二，Instability of multi-spots in general shadow systems for reaction-diffusion equations, International Workshop on Pattern Formation in Chemical and Biological Systems, 2010 年 10 月 26 日, Eotvos Lorand University, Budapest, Hungary.

③ 池田 幸太，三村 昌泰，Reflection of a traveling wave in smoldering combustion, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010 年 5 月 28 日, Dresden University of Technology, Dresden, Germany.

④ 池田 幸太，三村昌泰，Reflection of a traveling wave in smoldering combustion, 微分方程式の総合的研究, 2009 年 12 月 18 日，東京大学，東京.

⑤ 池田 幸太，三村昌泰，Reflection of a traveling wave in smoldering combustion, Nonlinear evolution equations and

mathematical modeling, Research Institute for Mathematical Sciences, 2009 年 10 月 22 日, Kyoto University, Kyoto.

６．研究組織

(1)研究代表者

池田　幸太 (IKEDA KOTA)
明治大学・研究・知財戦略機構・講師
研究者番号：50553369